

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

36. Band, Heft 1/3

2. Januar 1951

S. 1—144

## Geschichte.

● **Satterthwaite jr., Linton:** Concepts and structures of Maya calendrical arithmetics. (Joint Publications Museum of the University of Pennsylvania, The Philadelphia Anthropological Society Nr. 3) Philadelphia, Pa: University Museum 1947. 168 p. 82 tab.

Das infolge seiner verschiedenen nebeneinander bestehenden Zeiteinteilungen sehr verwickelte Kalendersystem der Maya sowie die Berechnungsmethoden, die man verwendet haben mochte, werden hier einer ebenso umfangreichen wie sorgfältigen Untersuchung unterzogen, wobei der Verf. über die früheren Deutungen hinaus auch eigene Vorschläge macht. Dabei dienen als Quellen einmal die wenigen Dokumente, die im wesentlichen aus astronomischen Zahlenfolgen bestehen, dann Inschriften sowie die Verfahrensweisen anderer mittelamerikanischer Völker und lebender mayasprechender Stämme. — Schon das Zahlensystem selbst ist nicht einheitlich. Bei den Maya in Yucatan existierte ein reines Zwanzigersystem (mit Stellenwert und der Null) zur Zählung von Kakaobohnen und anderen Dingen, das aber bei einem anderen Mayastamm (den Cakchiquel im Gebirge) auch für Kalenderzwecke (mit einem „Jahr“ von 400 Tagen) diente. Demgegenüber verwendeten die Maya im Tiefland ein modifiziertes Zwanzigersystem. Die Einheit war 1 kin (Tag), dann folgte 1 uinal = 20 kin, die 3. Stelle bildete 1 tun (Jahr) = 18 uinal (also gleich 360 Tage). Von da an ging die Zählung regelmäßig in Zwanzigerstufen weiter. In diesem System wurden die Zeitangaben durch Tageszahlen ausgedrückt, und zwar sowohl die seit einem weit zurückliegenden Anfangspunkt verfllossene Zeit als auch die zwischen zwei Daten liegende Zeitspanne. Eine besondere Komplizierung ergibt sich, weil daneben eine ganze Reihe von Zeitzykeln verschiedener Länge verwendet wurden. Es sind dies zuerst das Jahr mit 365 Tagen, dann die „wochenähnlichen“ Perioden von 13 nummerierten und 20 benannten Tagen. Neben diesen Zykeln, die für Mittelamerika überhaupt galten, hatten die Maya u. a. noch solche von 9,360 und 7200 (= 20 · 360) Tagen. Dazu kommen die astronomisch bedingten Perioden wie Mond- und Venusumlauf und Finsternisperioden. Durch Multiplikation sowie aus der Kombination von 2 oder mehr Zykeln entstehen neue Zyklen („Rounds“) wie der Tzolkin-Zyklus mit 260 = 13 · 20 Tagen, der mittelamerikanische „Calendar Round“ mit 18980 (= 73 · 260 oder 4 · 13 · 365) oder die Periode von 819 (= 7 · 9 · 13) Tagen. Das Problem der Korrelation dieser Zykeln wird eingehend untersucht, wobei betont wird, daß die Kombinationen entweder aus den Zahlen selbst „gesehen“ oder bewußt gebildet wurden. — Die Entstehung der nicht der Natur entnommenen Zyklen wird wohl nicht restlos zu klären sein. Bei den wochenähnlichen Perioden kann es sich um Markttagen handeln; da mit den „Wochentagen“ immer ein bestimmtes Omen verknüpft ist, spielen wohl auch religiös-mystische Vorstellungen herein. — Mit diesen Bemerkungen ist der Inhalt des Buches, das für Mathematiker, Astronomen und Ethnologen in gleicher Weise von Bedeutung ist, in keiner Weise erschöpft. Es sei nur noch auf die kritischen Untersuchungen über die Berechnung der Mondperioden hingewiesen. Hervorzuheben ist die vorzügliche Art, mit der der Verf. die Zusammenhänge dem Leser durch zahlreiche den Quellen entnommene oder hypothetisch gewählte Beispiele und Tabellen vor Augen führt. — Aus dem beigegebenen Literaturverzeichnis ersieht man, daß ein Drittel der genannten Arbeiten während des letzten Krieges erschienen ist; schon deshalb ist das vorliegende Werk für alle, denen jene Arbeiten nicht zur Verfügung stehen, von größter Wichtigkeit.

Kurt Vogel (München).

**Schepler, Herman C.:** The chronology of  $\pi$ . Math. Mag., Texas 23, 165—170 (1950).

Die vorliegende Chronologie von  $\pi$  umfaßt die Zeit von —3000 bis 628 n. Chr. (Brahmagupta). Da Verf. die neuere Literatur nicht verwendet (sogar Montucla wird noch herangezogen!), sind die gemachten Angaben und Daten vielfach zu korrigieren. Die  $\pi$ -Theorie bei der Cheopspyramide ist doch lange abgetan (s. Montel, dies. Zbl. 29, 1). Die Datierung des Pap. Rhind (Verf. kennt nur die Ausgabe von 1877) ist doch klarer bestimmt. Bei den Babyloniern ist  $\pi$  aus den Keilschrifttexten belegt. Hippokrates ist später anzusetzen; nicht 470 (S. 167) und 460 (S. 166). Das Geburtsjahr von Antiphon, der ein Zeitgenosse von Sokra-



tes war, wird mit 480 genannt. Für die angebliche Forderung Platons (Konstruktionsbeschränkung auf Zirkel und Lineal) fehlt jeder Nachweis [s. A. D. Steele, Quellen und Studien B 3, 287 (1936); dies. Zbl. 14, 146]. *Τετραγωνίζειν* heißt einfach „quadrieren“ (schon seit Hippokrates). Euklid wird als Schüler Platons bezeichnet; Herons Lebenszeit ist jetzt auch genauer festgelegt (terminus ante quem: 150 n. Chr.). Für die chinesische Mathematik hätte Y. Mikami (The development of mathematics in China and Japan, Leipzig 1913), für die indische (bei Baudhayana existieren z. B. mehrere Werte für  $\pi$ ) B. Datta (The science of the Śulba, Calcutta 1932) herangezogen werden können. — Die Fortsetzung des Artikels wird in Aussicht gestellt. *Kurt Vogel (München).*

●Reidemeister, K.: Das exakte Denken der Griechen. Beiträge zur Deutung von Euklid, Plato, Aristoteles. Hamburg: Claassen und Goverts, 1949. 108 S.; geb. DM 7,50.

Verf. hat früher über den Inhalt und das Wesen der griechischen Mathematik und deren Bedeutung für die Philosophie von Platon und Aristoteles eine Reihe geistvoller Abhandlungen veröffentlicht, nämlich: 1. Die Arithmetik der Griechen, 2. Mathematik und Logik bei Plato, 3. Das System des Aristoteles. Diese Abhandlungen werden hier nochmals zusammen mit einem einleitenden Kapitel „Mathematisches Denken“ und einer abschließenden Abhandlung „Geometrie und Kosmologie der Griechen“ in Buchform herausgegeben. So führen sie in ihrer Zusammenstellung dem Leser besonders eindringlich die Rolle vor Augen, die die Mathematik im klassischen Denken der Griechen spielte. Für die ersten drei Abhandlungen sei auf die Besprechungen in dies. Zbl. verwiesen (25, 145, 27, 193, 28, 193). In dem Kapitel „Mathematisches Denken“ wird der Gegensatz aufgezeigt, der zwischen griechischer und vorgriechischer Mathematik besteht. Es ist etwas Grundsätzliches, was jene von der früheren Erfahrungsmathematik trennt. Schon bei den Pythagoreern treten Mathemata (Lehrstücke) auf, also Theorien, bei denen man von den Grundlagen ausgehend zum Beweis von Sätzen fortschreitet. Dadurch können Aussagen gemacht werden über mathematische Dinge, die nicht mehr der Erfahrung zugänglich sind; neue Erkenntnisse, wie z. B. bei der Lehre vom Geraden und Ungeraden, werden gewonnen lediglich mit Hilfe des widerspruchsfrei denkenden Verstandes. — In der letzten Abhandlung „Geometrie und Kosmologie der Griechen“ wird der Gegensatz zwischen der archaisch-mythischen Kosmologie des Anaximander und dem aristotelischen Weltbild herausgearbeitet. Dieses baut auf der Geometrie der Gestirne auf, einer Leistung der griechischen Geometer des 5. und 4. Jahrhunderts. Der Kosmos des Aristoteles zeigt sich als die durch ontologischen Denken erfaßte Welt des ewig Seienden. — Das wertvolle, immer wieder zu neuem Nachdenken anregende Buch wird jeden, der sich um Erkenntnisse über die Entwicklung des menschlichen Geistes und über das Wesen der Mathematik bemüht, in seinen Bann zwingen. *Kurt Vogel (München).*

Hjelmlev, Johannes: Über Archimedes' Größenlehre. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 25, Nr. 15, 13 S. (1950).

Verf. betont am Anfang seiner äußerst bemerkenswerten Arbeit, daß mit Einführung neuer geometrischer Größen (krumme Linien und Flächen) ein neuer Abschnitt der griechischen Größenlehre beginnt, für die Archimedes in den Postulaten zu seiner Schrift „Über Kugel und Zylinder“ die notwendigen Voraussetzungen aufstellt. Eingehend wird das 5. Postulat behandelt, das besagt, daß die größere von zwei voneinander verschiedenen Größen derselben Art die kleinere um eine Größe übertrifft, die hinreichend oft vervielfacht jede gegebene Größe gleicher Art übertrifft (also:  $n \cdot (a - b) > c$ ). Verf. zeigt, daß dieses Archimedische Lemma nicht gleichbedeutend ist mit dem Axiom des Eudoxos (Euklid, V, Def. 4), das z. B. auch D. Hilbert in seinen Grundlagen der Geometrie (wohl im Anschluß an O. Stolz und G. Veronese) als Archimedisches Axiom bezeichnet. Bei Archimedes kann z. B.  $a$  ein Bogen oder eine Kugelfläche und  $b$  eine Strecke oder ein ebenes Flächenstück sein, so daß die Differenz  $a - b$  eine „ideale Größe“ darstellt, für die Archimedes per definitionem die Gültigkeit der Eudoxischen Arbeitsregel  $n \cdot (a - b) > c$  voraussetzt. — Verf. zeigt ferner, daß in der Größenlehre des



Archimedes nichts darüber ausgesagt wird, daß stets zwei zu zwei allgemeinen Größen proportionale Strecken existieren, daß es also nicht richtig ist, wenn Zeuthen sagt, daß dort „ein Verhältnis immer als das Verhältnis zweier Strecken dargestellt werden kann.“ Archimedes kann aus seinen Größenvoraussetzungen auch nicht beweisen, daß es eine Strecke gibt, die einem gegebenen Kreisumfang gleich ist. Dieser Gedanke tritt bei ihm wohl erst auf, als er bei seinen Untersuchungen über die Spirale fand, daß die „Polarsubtangente“ so lang ist wie der Umfang eines Kreises (mit dem Vektor zum Endpunkt der ersten Windung als Radius). Hieraus ergibt sich ohne Zweifel, daß die Schrift „Über Kugel und Zylinder“ vor der „Über die Spirallinien“ und vor der „Kreismessung“ abgefaßt sein muß. — Zum Schluß wird betont, daß man nach Einführung des Begriffs der „unabgeschlossenen Strecken“ und der Definitionen für Summe, Differenz, größer und kleiner sofort von der griechischen zur modernen Größenlehre kommt.

Kurt Vogel (München).

**Tabuenca Orallo, L.: Nicomaco de Gerasa.** Gac. mat., Madrid, I. Ser. 1, 257—262 (1949) [Spanisch].

Verf. gibt eine nützliche, allerdings gedrängte Inhaltsangabe der Arithmetik des Nikomachos, den er zu den „großen griechischen Mathematikern“ zählt, ein Urteil, das zum Schluß richtigerweise eingeschränkt wird. Man kann auch nicht sagen, daß das Werk nach den numerischen Rechenregeln von Archimedes, Heron und ihrer Nachfolger ausgearbeitet wurde. Störend wirken die im Druck manchmal bis zur Unkenntlichkeit entstellten griechischen Termini (z. B. *qorudez* statt *doxídes*). Bei den Angaben über die bisherigen Editionen ist H. Pistelli zu streichen; dieser hat Jamblichos herausgegeben. Hinzuzufügen wäre die wichtige Bearbeitung von D'Ooge-Robbins-Karpinski (New York 1926). Vogel.

**Giannelli, Biagio: Un grande avvenimento per le matematiche applicate.** Archimede, Firenze 2, 16—20 (1950).

Verf. gibt eine kurze Übersicht über Leben und Wirken von J. Neper (1550 bis 1617) und geht etwas näher auf die bewegungsgeometrische Einführung der Logarithmen aus  $dx/dy = -x/10^7$  und die hierauf gegründete Konstruktion der Neper'schen Logarithmen ein. Dieser Teil seiner Ausführungen wird wesentlich eingehender in J. Tropfke, Geschichte der Elementargeometrie II<sup>3</sup>, Berlin 1933, S. 214/218, 236/239 behandelt.

J. E. Hofmann (Tübingen).

**Hofmann, Jos. E.: Nicolaus Mercator (Kauffman), sein Leben und Wirken, vorzugsweise als Mathematiker.** Akad. Wiss. Literatur Mainz, Abhdl. math. naturw. Kl., Jahrgang 1950, Nr. 3, 45—103 (1950).

Über die Persönlichkeit des Holsteiners Nicolaus Mercator (1620—1687), der entdeckt hat, daß die Fläche des Hyperbelstreifens durch einen Logarithmus ausgedrückt und in eine unendliche Potenzreihe entwickelt werden kann, war bisher nur wenig bekannt, obwohl er zu den angesehensten Gelehrten des 17. Jahrhunderts gehörte. Es ist deshalb zu begrüßen, daß der Verf. durch eingehende Quellenstudien sein Leben und Wirken aufgehellte hat. Den größten Teil seines von Sorgen ums tägliche Brot erfüllten Lebens verbrachte Mercator in England (seit 1669 als Mitglied der Royal Society), die letzten 5 Jahre in Paris, wo er die Einrichtung der Wasserspiele in Versailles übernahm. Seine Neigung gehörte der Astronomie, der Technik und der Mathematik. Verf. schildert die Entstehung seiner Arbeiten, gibt eine Vorstellung von ihrem Inhalt, verfolgt ihren Einfluß auf das Schaffen anderer Gelehrter und gibt Einblick in Mercators menschliche und wissenschaftliche Beziehungen zu den großen Mathematikern des 17. Jahrhunderts, die ihn hoch schätzten. Sein wichtigstes Werk, die Logarithmotechnia (1667), in dem die Hyperbelquadratur enthalten ist, war zwar in seiner Wirkung durch formale Mängel beeinträchtigt, ist aber trotzdem eine schöpferische Leistung, die ihren Urheber zu einem Pionier auf dem Wege zur höheren Analysis macht. — Alle Angaben sind quellenmäßig aufs genaueste belegt, z. T. durch Abdruck wichtiger Stellen aus zeitgenössischen Briefen, Veröffentlichungen und Akademieberichten. Verf. glaubt, daß beim Nachforschen in den z. Z. noch nicht frei zugänglichen Archiven handschriftliches Material aus Mercators Nachlaß und weitere wichtige Einzelheiten über seine Persönlichkeit



und Leistung zu erwarten sind. Die Arbeit ist mit 14 schönen Tafeln geschmückt, auf denen die Originaltitel aller im Druck erschienenen Schriften Mercators in Faksimile wiedergegeben sind.

*E. Löffler* (Stuttgart).

● **Turnbull, H. W.:** *The mathematical discoveries of Newton.* — 2nd ed. London and Glasgow: Blackie and Son 1947. VIII, 68 S. mit 6 Fig. und einem Bildnis. Geb. 5 s. 6 d.

**Koyré, Alexandre:** *The significance of the Newtonian synthesis.* Arch. internat. Hist. Sci., Paris 29, 291—311 (1950).

Wiedergabe einer öffentlichen Vorlesung an der Universität Chicago über Newtons Weltbild, die hübsch und anregend geschrieben ist, aber wesentlich neue Gesichtspunkte kaum gibt.

*R. Seeliger* (Greifswald).

**Hooykaas, R.:** *The first kinetic theory of gases (1727).* Arch. internat. Hist. Sci., Paris 28, 180—184 (1948).

Euler gab eine Erklärung der Gasgesetze auf Grund einer an Descartes anschließenden kinetischen Theorie kleiner elementarer Wirbel.

*C. F. v. Weizsäcker* (Göttingen).

**Fierz, M.:** *Die Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik durch R. Clausius vor hundert Jahren.* Experientia, Basel 6, 199—200 (1950).

● **Sergescu, P.:** *Les recherches sur l'infini mathématique jusqu'à l'établissement de l'analyse infinitésimale.* (Histoire des mathématiques, Exposés publiés sous la direction de P. Sergescu. I. Actual. sci. industr. No. 1083.) Paris: Hermann & Cie. 1949. 32 p.

Diese in ihrer Art sehr verdienstvolle Zusammenstellung enthält einen guten Überblick über die wichtigsten infinitesimalen Methoden und Ergebnisse vor Erfindung des Calculus mit gelegentlich näher ausgeführten Einzelbeispielen und einigen kurzen Andeutungen über die ersten Erfolge der neuen Methoden gegen Ende des 17. Jh. Die literarischen Angaben sind etwas spärlich und nicht ganz zuverlässig; daß z. B. J. Gregory als Jesuit bezeichnet wird (S. 9), ist ein peinliches Versehen. Ref. hätte für die zu erwartende Neuauflage ein Namen- und Schriftenverzeichnis sehr gewünscht.

*J. E. Hofmann* (Tübingen).

**Bohr, Harald:** *Über eine neue Ausgabe von Zeuthens Geschichte der Mathematik.* Mat. Tidsskr. A, København 1949, 60—66 (1949) [Dänisch].

Verf. gibt in diesem Vortrag vor dem 11. skandinavischen Mathematiker-Kongreß in Trondheim nach Würdigung der Zeuthenschen Keglesnitslaeren i Oldtiden (Kopenhagen 1885) einen Überblick über die Tendenzen und die tiefgreifenden neuen Forschungsergebnisse, die Otto Neugebauer in die von ihm besorgte Neuauflage (Kopenhagen 1949) hineingearbeitet hat.

*J. E. Hofmann.*

**Siriati, Lorenzo:** *Testi scolastici di geometria del decorso secolo.* Periodico Mat., IV. S. 26, 65—73 (1948).

Die Arbeit ist ein Beitrag zur Geschichte des geometrischen Unterrichts in Italien. Sie will zeigen, wie im letzten Drittel des vorigen Jahrhunderts geometrische Methoden, die modernen Begriffsbildungen Rechnung tragen und über Euklid hinausführen, im Schulunterricht Eingang fanden. Verf. hebt hervor, daß bei der Beurteilung geometrischer Unterrichtswerke zu unterscheiden ist zwischen solchen, die durch geniale Originalität, neue Begriffsbildungen und fruchtbare Ausblicke sich auszeichnen und zwischen solchen, die zwar eine klare und logische Darstellung geben, aber sich auf einfache Popularisierung beschränken. Im Jahre 1867 hatte die italienische Regierung auf Anregung Cremonas angeordnet, daß in den höheren Schulen die Geometrie an Hand von Euklids Elementen zu lehren sei. Die Notwendigkeit, den Unterricht zu verbessern und zu vereinfachen, führte jedoch in der Folge dazu, daß auch andere Lehrbücher zugelassen wurden, die moderne Methoden berücksichtigten, vorausgesetzt, daß sie sich in den Grenzen Euklids hielten. Verf. bespricht einige besonders charakteristische derartige Werke, die in den letzten 30 Jahren des vorigen Jahrhunderts in Italien erschienen sind. Im vorliegenden ersten Teil der Arbeit behandelt er die 7. Auflage (1888) der Elemente der Geometrie von A. Sannia und E. D'Ovidio. Das erstmals 1869 erschienene Werk ist das erste, das in Italien für würdig befunden wurde, Euklids Elemente im Unterricht zu ersetzen. Als zweites Werk wählt Verf. die Elemente der Geometrie von R. De Paolis, die 1884 erschienen und zum ersten



Male die Methode der Fusion zugrunde legten, d. h. eine gleichzeitige Behandlung ebener und räumlicher Gebilde. Verf. kündigt an, in weiteren Artikeln Werke von Veronese, Nannei und Faifofer zu besprechen, die sich durch besondere Originalität der Begriffsbildung, eigenartigen Aufbau und zweckmäßige Modifikation der Euklidschen Richtung von anderen abheben.  
E. Löffler (Stuttgart).

**Siriati, Lorenzo:** Testi scolastici di geometria del decorso secolo. Periodico Mat., IV. S. 27, 133—139 (1949).

Die Arbeit enthält den Schluß der Besprechung geometrischer Unterrichtswerke, die Verf. in vorsteh. referierter Arbeit begonnen hat. Sie behandelt die Elemente der Geometrie zum Gebrauch an Lyzeen und technischen Lehranstalten von F. Faifofer (1834—1909), deren 17. Auflage im Jahre 1909 erschien. Die Besprechungen der Werke von Veronese und Nannei, die im ersten Artikel angekündigt waren, lagen dem Rezensenten nicht vor. Das Werk Faifofers war jahrelang bei Lehrenden und Lernenden sehr beliebt und hatte bemerkenswerten Einfluß auf spätere Unterrichtswerke ausgeübt. Faifofer hielt sich zwar an die Euklidische Methode und an die übliche Einteilung in Planimetrie und Stereometrie, aber er hat doch eine Reihe neuer Gedanken in vereinfachter und verbesserter Darstellung eingeführt, die Verf. im einzelnen charakterisiert. Zum Schluß weist er auf die zahlreichen Aufgaben und Sätze hin, durch die Faifofer seine Unterrichtswerke bereichert hat. Das besprochene Werk enthält etwa 1000 solcher Übungen, die ausschließlich geometrischen Charakter tragen und auf jedes arithmetische oder algebraische Hilfsmittel verzichten.  
E. Löffler (Stuttgart).

**Lunc, G. L.:** Die analytischen Arbeiten N. I. Lobačevskijs. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 1 (35), 187—195 (1950) [Russisch].

Die Arbeit enthält die Besprechung von vier Artikeln, welche folgenden Gebieten angehören: Konvergenz von unendlichen Reihen  $\sum a_n$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ ); Konvergenz von Fourierreihen; Gammafunktion; Integraltransformationen. Gal.

**Sadovskij, L. E.:** Aus der Geschichte der Entwicklung der maschinellen Mathematik in Rußland. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 2 (36), 57—71 (1950) [Russisch].

Zum 70. Geburtstag Sergej Natonovič Bernštejns. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 14, 193—198 (1950) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis für die Jahre 1940—1949.

**Brusotti, Luigi:** Luigi Berzolari. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 1—19 (1950). Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

**Cinquini, S.:** Leonida Tonelli. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. S. 15, 1—37 (1950).

Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

**Bohr, Harald:** Entwicklungszüge der mathematischen Wissenschaft. Mat. Tidsskr. A, København 1949, 49—59 (1949) [Dänisch].

Wiedergabe eines Schulfunkvortrags.

H. L. Schmid (Berlin).

● **Lietzmann, Walter:** Das Wesen der Mathematik. (Sammlung „Die Wissenschaft“, Bd. 102. Herausgeber Prof. Dr. Wilhelm Westphahl.) Braunschweig: Verlag Friedr. Vieweg & Sohn 1949. VII, 169 S. u. 41 Abb. Karton. DM 8.—.

Das Büchlein will einem schon etwas mit der Mathematik vertrauten Leser einen tieferen Einblick geben in die Grundlagen und die Denkweise der modernen Mathematik, insofern sie Berührungspunkte aufweist mit der Schulmathematik. Im ersten Kapitel wird die Logik im Aufbau der Mathematik besprochen. Klassische, aber auch die neuere formale Logik kommen zur Sprache. Im zweiten Kapitel handelt es sich um die Grundlegung der Geometrie. Man kann hier lesen über die merkwürdigen Strapazen der Anschauung, aber auch wie eine sichere Grundlage gegeben wird durch die axiomatische Methode. Die Grundlegung der Arithmetik hat im dritten Kapitel einen Platz gefunden. Man findet z. B. hier die Peanoschen Axiome neben Betrachtungen über transfinite Zahlen. Dann folgt im vierten Kapitel die Grundlegung der Analysis, eine Einführung des Grenzwertbegriffes und die Elemente der Infinitesimalrechnung. Das Schlußkapitel enthält einige philosophische



Betrachtungen erkenntnistheoretischer Art. Die einfache, anregende, jedem gebildeten Laien verständliche Darstellung wird dem Buche einen ausgedehnten Leserkreis sichern.  
J. C. H. Gerretsen (Groningen).

● **Readings in philosophical analysis.** Selected and edited by Herbert Feigl and Wilfrid Sellars. New York: Appleton-Century-Crofts, Inc. 1949. X, 626 pp.

Enthält u. a. Wiederabdrucke folgender Arbeiten: W. V. Quine, Designation and existence, pp. 44—51. Alfred Tarski, The semantic conception of truth, pp. 52—84. Gottlob Frege, On sense and nominatum, pp. 85—102. Bertrand Russell, On denoting, pp. 103—115. Ernest Nagel, Logic without ontology, pp. 191—210. Carl G. Hempel, On the nature of mathematical truth, pp. 222—237. Rudolf Carnap, The two concepts of probability, pp. 330—348. Roderick M. Chisholm, The contrary-to-fact conditional, pp. 482—497.

● **Whitehead, A. N.: Einführung in die Mathematik.** Aus dem Englischen übersetzt von B. Schenker. (Sammlung „Die Universität“, Bd. 2.) Wien: Humboldt Verlag 1948. 220 S. mit 33 Fig., DM 6,20.

● **Whitehead, A. N.: Philosophie und Mathematik.** — Vorträge und Essays. — Aus dem Englischen übersetzt von Felizitas Ortner. (Sammlung „Die Universität“, Band 9.) Wien: Humboldt-Verlag 1949. 216 S. 23,00 S.

**Bar-Hillel, Yehoshua:** On syntactical categories. J. symbolic Logic 15, 1—16 (1950).

Verf. untersucht die Möglichkeit von formalisierten Sprachen, in denen — wie in den Umgangssprachen —  $Pa$  nicht für jedes Individuum  $a$  und jedes Prädikat  $P$  eine Aussage ist. Zwei Ausdrücke  $e_1, e_2$  heißen „isogen“, wenn für jede Aussage  $s(e_1)$  auch  $s(e_2)$  eine Aussage ist.  $e_1, e_2$  heißen „verwandt“, wenn es eine Aussage  $s(e_1)$  gibt, für die auch  $s(e_2)$  eine Aussage ist. Diese — und hieraus abgeleitete — Begriffe werden an mehreren Modellsprachen untersucht.  
Lorenzen (Bonn).

**Smullyan, Arthur Francis:** Modality and description. J. symbolic Logic 13, 31—37 (1948).

Nach einem Beispiel von Quine: A. Es ist logisch notwendig, daß 9 kleiner als 10. B.  $9 =$  Anzahl der Planeten. C. Folglich: es ist logisch notwendig, daß die Anzahl der Planeten kleiner ist als 10, ist in der Modalitätenlogik scheinbar das Leibnizsche Prinzip: „wenn  $x = y$ , so hat  $y$  jede Eigenschaft von  $x$ “ verletzt. Verf. zeigt, daß dieses Paradoxon vermieden werden kann, wenn Kennzeichnungen nach Russell durch Gebrauchsdefinitionen eingeführt werden und wenn man dabei beachtet, daß auch für Kennzeichnungen, deren zugehörige Unizitätsaussage beweisbar ist, die Unabhängigkeit vom „scope“, die die Voraussetzung dafür ist, daß diese als Namen aufgefaßt werden können, für Ausdrücke mit eigentlich-modalen Verknüpfungen nicht gezeigt werden kann.  
G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

**Hoo, Tzu-Hua:**  $m$ -valued subsystem of  $(m + n)$ -valued propositional calculus. J. symbolic Logic 14, 177—181 (1949).

Eine  $m$ -wertige Matrix ist ein  $m$ -zähliger Bereich von „Wahrheitswerten“ mit einer Aufzählung der „Wahrheitsfunktionen“, die den aussagenlogischen Konstanten zugeordnet werden. Die Sätze werden hier mit Hilfe eines ausgezeichneten Wahrheitswertes bestimmt. Ein Kalkül heißt  $m$ -wertig, wenn er durch eine  $m$ -wertige Matrix bestimmt ist. — Ein  $(m + n)$ -wertiger Kalkül kann ein echtes Teilsystem eines  $m$ -wertigen Kalküls sein, die Umkehrung ist ausgeschlossen. — Verf. widerlegt die dadurch nahegelegte Vermutung, daß die Kalküle mit wachsenden  $m$  immer „dünnere“ werden, indem er zu einem  $m$ -wertigen Kalkül eine Folge von  $(m + n)$ -wertigen Kalkülen angibt, in denen die Konstanten des  $m$ -wertigen Kalküls definierbar sind (die Def. hängt von  $n$  ab) und so, daß die Satzmenge des  $m$ -wertigen Kalküls zusammenfällt mit den auf die definierten Konstanten beschränkten Satzmenge der  $(m + n)$ -wertigen Kalküle.  
G. Hasenjaeger (Münster i. W.).



Rosser, J. B. and A. R. Turquette: A note on the deductive completeness of  $m$ -valued propositional calculi. *J. symbolic Logic* **14**, 219—225 (1950).

In „Axiom schemes for  $m$ -valued propositional calculi“ [*J. symbolic Logic* **10**, 61—82 (1945)] haben Verff. für gewisse  $m$ -wertige Matrizen mit  $s$  ausgezeichneten Werten vollständige Systeme von Axiomenschematen aufgestellt. Die neue Arbeit bringt eine Vereinfachung durch Reduktion der Anzahl der undefinierten Konstanten.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

Skolem, Th.: A remark on the induction scheme. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **22**, Nr. 36, 167—170 (1950).

Verf. zeigt, wie das dreigliedrige Induktionsschema für Aussagen

$$[A(0) \wedge (A(n) \rightarrow A(n'))] \rightarrow A(n)$$

nach Einführung von  $\leq$  ersetzt werden kann durch den Spezialfall

$$[f(0) = 0 \wedge (f(n) \geq f(n'))] \rightarrow f(n) = 0$$

für arithmetische Funktionen. Ob auch

$$[f(0) = 0 \wedge (f(n) = f(n'))] \rightarrow f(n) = 0$$

genügt, bleibt offen.

Lorenzen (Bonn).

Markov, A. A.: Über die Abhängigkeit des Axioms B 6 von den anderen Axiomen des Systems von Bernays-Gödel. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **12**, 569—570 (1948) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß in dem mengentheoretischen Axiomensystem in Gödels „The consistency of the axiom of choice and of the generalised continuum-hypothesis with the axioms of set theory“ (*Annals of mathematics studies* Nr. 3, Princeton 1940) das Axiom, das zu jeder Paarklasse die Existenz einer inversen Klasse fordert, aus den übrigen Axiomen ableitbar ist.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

Bergmann, Gustav: The finite representations of S5. *Methodos, Milano* **1**, 217—219 (1949).

Ein Zusatz zu McKinseys „A solution of the decision problem for the Lewis systems S 2 and S 4, with an application to topology“, *J. symbolic Logic* **6**, 117—134 (1941). Charakterisierung derjenigen endlichen normalen Matrizen, deren Erfüllungs-menge S 5 umfaßt.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

Bergmann, Gustav: A syntactical characterization of S 5. *J. symbolic Logic* **14**, 173—174 (1949).

Ein Zusatz zu McKinseys „On the syntactical construction of systems of modal logic“, *J. symbolic Logic* **10**, 83—94 (1945). Die von McKinsey für das System S 4 (Lewis Langford, *Symbolic logic*, p. 501, New York-London 1932) angegebene Charakterisierung (möglich =<sub>Dr</sub> durch gewisse Umformungen in eine wahre Aussage überführbar) wird auf S 5 übertragen.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

Halldén, Sören: A note concerning the paradoxes of strict implication and Lewis's system S1. *J. symbolic Logic* **13**, 138—139 (1948).

Es wird gezeigt, daß die folgenden Ausdrücke

$$\sim \Diamond p \supset p \supset q, \quad \sim \Diamond \sim p \supset q \supset p, \quad \Diamond(pq) \supset \Diamond p.$$

Sätze des Systems S 1 sind, obwohl der Ausdruck  $\Diamond(pq) \supset \Diamond p$ , der zu den Paradoxa der strict implication Anlaß gibt, diesem System nicht angehört.

G. Hasenjaeger (Münster i. W.).

Halldén, Sören: Results concerning the decision problem of Lewis's calculi S 3 and S 6. *J. symbolic Logic* **14**, 230—236 (1950).

Zusätzlich zu den Systemen S 1—S 5 werden eingeführt: S 6 =<sub>Dr</sub> S 2, erweitert durch  $\Diamond \Diamond p$ , S 7 =<sub>Dr</sub> S 3, erweitert durch  $\Diamond \Diamond p$ , und S 8 =<sub>Dr</sub> S 3, erweitert durch  $\sim \Diamond \sim \Diamond \Diamond p$ . S 6—S 8 sind widerspruchsfrei; man kennt aber keine



interessante Interpretation. Sie sind eingeführt wegen einiger Zusammenhänge mit den Systemen S 1 — S 5. Es wird gezeigt: (Theorem 4) Ein Ausdruck ist ein S 3-Satz genau dann, wenn er ein S 7-Satz und ein S 4-Satz ist. (Theorem 6) Ein Ausdruck ist ein S 3-Satz genau dann, wenn er ein S 8-Satz und ein Satz von

$$S\ 3 + \Diamond(\sim\Diamond\sim p \cdot \prec \cdot \sim\Diamond\sim\sim\Diamond\sim p)$$

ist. (Theorem 9, 10) Die Anzahl der (im Postschen Sinne) vollständigen Erweiterungen von S 3 ist die Summe der Anzahl der vollständigen Erweiterungen von S 4 (d. i. eine) und der Anzahl der vollständigen Erweiterungen von S 7. Durch eine Übertragung von McKinseys Entscheidungsverfahren für S 2 wird gezeigt: (Theorem 14)  $P$  sei ein S 6-Ausdruck, der genau  $r$  (eigentliche oder uneigentliche) Teilausdrücke enthält. Dann ist  $P$  beweisbar genau dann, wenn  $P$  durch jede normale S 6-Matrix mit höchstens  $2^{2^{r+1}}$  Elementen erfüllt wird. *G. Hasenjaeger.*

**Halldén, Sören:** A question concerning a logical calculus related to Lewis' system of strict implication, which is of special interest for the study of entailment. *Theoria*, Stockholm 14, 265—269 (1948).

**Stenius, Erik:** Natural implication and material implication. *Theoria*, Stockholm 13, 136—156 (1947).

**Destouches-Février, Paulette:** Connexions entre les calculs des constructions, des problèmes, des propositions. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 228, 31—33 (1949).

Der Zweck der Arbeit, die intuitionistischen Gedankengängen nahe steht, ist, den Begriff des Problems und der Aussage auf den der Konstruktion zurückzuführen. Jedes zu lösende Problem wird als die Aufgabe, eine bestimmte Konstruktion zu finden, angesehen. Ein Objekt existiert nur dann, wenn es konstruiert werden kann. Ein Beweis besteht in der Auffindung einer Konstruktion. Elementare Aussagen schlechthin gibt es nicht, sondern nur solche der folgenden Art: Man kann ein Element  $a$  konstruieren, so daß  $p(a)$ . Man kann die Spezies der Elemente  $a$  konstruieren, so daß  $p(a)$ . Setzt man nun einen Kalkül der Konstruktionen voraus, — hierfür wird auf frühere Arbeiten der Verf. verwiesen — so erhält man auch einen isomorphen Kalkül der Probleme; ferner lassen sich die Verknüpfungen der Aussagen auf Beziehungen zwischen Konstruktionen zurückführen. Z. B. würde  $p(x) \rightarrow q(y)$  bedeuten: von der Konstruktion eines Elementes  $x$  mit  $p(x)$  gelange ich zur Konstruktion eines Elementes  $y$  mit  $q(y)$ . Die Einführung der Negation für Aussagen wird abgelehnt. Im übrigen sind die Gedankengänge nur kurz skizziert, so daß nicht ersichtlich ist, ob ein wesentlicher Unterschied zwischen der vorliegenden Auffassung und der Heytingschen Interpretation seines Kalküls besteht.

*W. Ackermann (Lüdenscheid).*

**Fitch, Frederic B.:** Intuitionistic modal logic with quantifiers. *Portugaliae Math.* 7, 113—118 (1948).

Die modalen Begriffe werden hier im Rahmen des Heytingschen intuitionistischen Kalküls eingeführt. Anscheinend lassen sich auf dieser Grundlage „Notwendigkeit“ und „Möglichkeit“ nicht durcheinander definieren, so daß beide als unabhängige Begriffe eingeführt werden. Die wesentlichen Axiome und Schlußregeln, die zu dem Heytingschen Kalkül hinzukommen, sind, wenn wir mit  $N\mathfrak{A}$  die Notwendigkeit von  $\mathfrak{A}$  und mit  $M\mathfrak{A}$  die Möglichkeit von  $\mathfrak{A}$  bezeichnen: Wenn  $\mathfrak{A}$  ein Axiom ist, so gilt  $N\mathfrak{A}$ ;  $N\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ ;  $N(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (N\mathfrak{A} \rightarrow N\mathfrak{B})$ ;  $N(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (M\mathfrak{A} \rightarrow M\mathfrak{B})$ ;  $(x) N\mathfrak{A}(x) \rightarrow N(x) \mathfrak{A}(x)$ ;  $M(E_x) \mathfrak{A}(x) \rightarrow (E_x) M\mathfrak{A}(x)$ ;  $\mathfrak{A} \rightarrow M\mathfrak{A}$ . Es sei bemerkt, daß das Beckersche Axiom  $N\mathfrak{A} \rightarrow NNA$  oder  $MM\mathfrak{A} \rightarrow M\mathfrak{A}$  nicht abgeleitet werden kann.

*W. Ackermann (Lüdenscheid).*

• **Jordan, P.:** Das Bild der modernen Physik. Hamburg-Bergedorf: Stromverlag 1948.

Dieses Buch „ergänzt und vervollständigt ... zwei andere Bücher des Verf. (Die Physik des 20. Jahrhunderts und die Physik und das Geheimnis des organischen



Lebens)“. Inhalt: 1. Buch: Die neue Physik, 2. Buch: Die neue Biologie (Diskussion von Quantenbiologie und ein Kapitel „Gedanken zu einer deskriptiven Wertlehre“), 3. Buch: Blick in den Kosmos (Darstellung der neuen Kosmologie des Verf.).

*C. F. v. Weizsäcker* (Göttingen).

● **Born, Max: Natural philosophy of cause and chance.** Oxford: At the Clarendon Press 1949. VII, 215 p. 17 s. 6 d. net.

Der Zusammenbruch der mechanistischen Auffassung des Universums durch die Quantentheorie ist der Hauptgegenstand des vorliegenden Buches. Es geht von bestimmten Definitionen der Begriffe „Determinismus“ und „Kausalität“ aus. Unter der letzteren wird die Existenz von Gesetzen verstanden, nach welchen eine physikalische Situation *B* einer gewissen Klasse (im weitesten Sinne verstanden) vom Vorliegen einer physikalischen Situation *A* einer anderen Klasse abhängt. *A* heißt dann Ursache, *B* Wirkung. Ihre wesentlichen Attribute sind die zeitliche Aufeinanderfolge (Antezedenz) und räumliche Aufeinanderfolge (Kontiguität). Unter Zugrundelegung dieser Definitionen wird nun ein Überblick über die Entwicklung der physikalischen Wissenschaft gegeben, dessen wichtigste Kapitel die Mechanik der Massenpunkte und der kontinuierlichen Medien, die Elektrodynamik und die Thermodynamik sind. Die Diskussion der mit statistischen Methoden zu behandelnden Disziplinen der Physik (kinetische Gastheorie, statistische Mechanik) leitet dann zur Quantenphysik über und führt zu der Schlußfolgerung, daß durch sie nicht die richtig verstandene Kausalität, sondern nur ihre traditionelle Identifizierung mit dem Determinismus aufgehoben wird. Die Kausalität bleibt bestehen für die Wahrscheinlichkeit der elementaren Ereignisse, nicht für die einzelnen Ereignisse selbst. So ergibt sich die eigenartige Sachlage, daß die beobachtbaren Ereignisse Zufallsgesetzen unterliegen, während für die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse Gesetze gelten, die alle wesentlichen Züge kausaler Gesetze besitzen. — Dies ist nur eine Seite des vorliegenden Buches. Die andere Seite ist ein eleganter Überblick über die Gesetze der Physik, der besonders die Thermodynamik (und ihren axiomatischen Aufbau nach Carathéodory), die kinetische Gastheorie und die erst in den letzten Jahren vom Verfasser und seinem Mitarbeiter Green entwickelte kinetische Theorie der Flüssigkeiten berücksichtigt. Ein „Anhang“, der fast die Hälfte des Buches ausmacht, bringt die mathematischen Entwicklungen und Ergänzungen zu den im ersten Teil vorgetragenen physikalischen Überlegungen (vorgetragen im eigentlichen Sinn des Wortes; denn das Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die im Jahre 1948 vor einem Publikum gehalten wurden, in welchem, wie der Verfasser schreibt, Physiker und Mathematiker in der Minderheit waren). Die Darstellung ist durchweg klar, einfach und anregend. Alles in Allem: ein sehr lesenswertes Buch!

*J. Meixner* (Aachen).

● **Reboul, Georges et Jean-Antoine Reboul: Un axiome universel. Ses applications aux sciences expérimentales.** (Monographies des probabilités, Fasc. VII.) Paris: Gauthier-Villars 1950. XX, 148 p.

An die Spitze der Abhandlung wird das Axiom gestellt: Jede endliche Änderung des Zustands eines Systems ist die Summe aus Einzeländerungen (changements élémentaires), die allein durch Wahrscheinlichkeitsgesetze bestimmt werden. Und es wird durch die ganze Physik hindurch untersucht, wie ein großer Teil physikalischer Gesetze und Erscheinungen durch dieses Axiom begründet werden kann. Bei den ohnehin statistischen Problemen der kinetischen Theorie der Materie ist dies einleuchtend. Die Verff. versuchen aber, diesen Nachweis auch beispielsweise für die gewöhnliche Mechanik eines Massenpunktes zu erbringen, wo man freilich höchstens von einer gewissen Analogie in verschiedenen Differentialbeziehungen sprechen kann.

*Sauter* (Göttingen).



**Reboul, Georges:** *Un axiome universel.* Rev. sci., Paris 86, 21—26 (1948).

Das hier diskutierte universelle Axiom lautet: Jede endliche Zustandsänderung eines Systems ist die Gesamtsumme elementarer Änderungen, die ausschließlich von den Gesetzen des Zufalls beherrscht werden. *C. F. v. Weizsäcker* (Göttingen).

**Henry-Hermann, Grete:** *Die Kausalität in der Physik.* Studium gen., Berlin 1, 375—383 (1948).

Anschließend an frühere Arbeiten der Verf. (vor allem „Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik“, Berlin 1935) wird die Situation des Kausalgesetzes in der Quantenmechanik diskutiert. Der prinzipiell statistische Charakter der Quantenmechanik wird akzeptiert. Es scheint aber paradox, daß aus Erfahrungen soll nachgewiesen werden können, daß es für irgendeinen Vorgang keine hinreichenden Ursachen gäbe. Der Verzicht der Quantenmechanik auf volle Determination der Zukunft, scheint mit dem Prinzip der Unabgeschlossenheit der Erfahrung im Widerspruch zu stehen. Es wird gezeigt, daß dieser Widerspruch behoben werden kann durch eine Diskussion des Heisenbergschen „Schnitts“ zwischen dem Bereich, in dem wir die Natur klassisch beschreiben, und dem Bereich, in dem wir die quantenmechanischen symbolischen Methoden anwenden müssen. Zu jedem wirklich eingetretenen Ereignis lassen sich die Ursachen, die es bestimmt haben, auf Wunsch durch eine geeignete dazu eingerichtete Meßanordnung bestimmen. Insofern läßt sich niemals eine Durchbrechung einer Kausalkette empirisch aufweisen. Andererseits reicht wegen der Unbestimmtheitsrelation die Menge der Messungen, die widerspruchsfrei miteinander vereinbart werden können, nicht aus, um das zukünftige Geschehen vollständig zu determinieren. „Akausale Vorgänge im strengen Sinne des Wortes gibt es auch für die Quantenmechanik nicht, wohl aber entfällt die andere klassische Überzeugung, wonach auf Grund dieser Kausalbeziehungen das gesamte Naturgeschehen einen einzigen, prinzipiell von einem beliebigen Zeitpunkt aus übersehbaren und berechenbaren Zusammenhang bildet“. Verf. weist darauf hin, daß diese Erkenntnis nicht mit den üblichen positivistischen Deutungen der modernen Physik verwechselt werden darf. *C. F. v. Weizsäcker.*

**Hund, F.:** *Wirkungsquantum und Naturbeschreibung.* Deutsche Akad. Wiss. Berlin, Vortr. Schr. 1949, Nr. 35, 18 S. (1949).

In dem nun auch im Druck vorliegenden Vortrag, gehalten in der Gedenkfeier für Max Planck am Leibniztag 1948 der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, gibt der Jenaer Theoretische Physiker eine allgemein verständliche Übersicht über die grundsätzliche Wandlung, die durch die Quantentheorie in unserem Denken über die Natur erfolgt ist. Nach einem einleitenden Abschnitt über Wesen und Gültigkeitsbereich des klassischen mechanischen Weltbildes zeigt er, daß es nicht ausreicht zur Beschreibung der Ordnung der physikalischen Erscheinungen. „Die bisherigen Theorien wurden nicht falsch, aber die Bedingtheit ihrer Voraussetzungen wurde erkannt“. Die Quantentheorie, an deren Anfang und in deren Mittelpunkt das Plancksche Wirkungsquantum steht, ist die begrifflich strenge, aber anschaulich nicht vollziehbare Vereinigung der Teilchenvorstellung und der Wellenvorstellung bei Licht und Materie. Der Dualismus Welle-Korpuskel und die grundsätzliche Unanschaulichkeit der neuen Theorie also sind es, die als die wesentlichen Faktoren betont werden. Eine Menge schön formulierter allgemeiner Gedanken über die Beziehungen zwischen Physik und Chemie und Physik und Biologie sowie solche erkenntnistheoretischer Art beleben in anregendster Weise den Text und werden auch bei Nichtphysikern Beachtung und Zustimmung finden. *R. Seeliger.*

**Seeliger, R.:** *Analogien und Modelle in der Physik.* Studium gen., Berlin 1, 125—137 (1948).

Erörterung von Modellen wie z. B. der folgenden: Felix Kleins Existenzbeweis für eine Funktion gegeben aus Singularitäten durch die Interpretation als elektrischer Strom. Mechanische Modelle der Elektrodynamik und der Thermodynamik. Mathematischer Hintergrund solcher Modelle in den Lagrangeschen Gleichungen, statistische Deutung des zweiten Hauptsatzes. *C. F. v. Weizsäcker.*



# Algebra und Zahlentheorie.

## Kombinatorik:

- Jacobsthal, Ernst: Über die Anzahl von Permutationen von  $n$  Elementen, die  $r$  Inversionen besitzen. I. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **22**, Nr. 10, 31—36 (1950).  
 Jacobsthal, Ernst: Über die Anzahl von Permutationen von  $n$  Elementen, die  $r$  Inversionen besitzen. II. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **22**, Nr. 11, 37—41 (1950).

Für die Anzahl  $\psi(n, r)$  der Permutationen von  $n$  Elementen mit genau  $r$  Inversionen,  $0 \leq r \leq \binom{n}{2}$ , wird zunächst die Rekursionsformel

$$\psi(n+1, r) = \sum_{r-n \leq s \leq r} \psi(n, s) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots; r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

bewiesen, wobei  $\psi(n, r) = 0$  gesetzt wird für  $r < 0$  und  $r > \binom{n}{2}$ . Hiermit folgt, falls  $F_r(x)$  das  $r$ -te Kreisteilungspolynom bedeutet, die Darstellung

$$\prod_{r=2}^n F_r(x)^{[n/r]} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \psi(n, r) x^r$$

(rechts steht ein Polynom) und hieraus schließlich die explizite Formel

$$\psi(n, r) = \frac{(-1)^r}{r!} \begin{vmatrix} \sigma(1, n) - n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma(2, n) - n & \sigma(1, n) - n & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(r, n) - n & \sigma(r-1, n) - n & \sigma(r-2, n) - n & \dots & \sigma(1, n) - n \end{vmatrix},$$

wo in der Parallelen oberhalb der Hauptdiagonalen die Zahlen  $1, 2, \dots, r-1$  stehen und  $\sigma(k, n)$  die Summe der Teiler  $\leq n$  von  $k$  bezeichnet. Schließlich wird für  $n \geq r$  eine weitere Rekursionsformel mittels der Cauchyschen Koeffizientenformel abgeleitet.

Rohrbach (Mainz).

Rao, C. Radhakrishna: On a class of arrangements. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. **8**, 119—125 (1949).

Von der Menge der  $s^n$  Aggregate  $A_{1,k_1} A_{2,k_2} \dots A_{n,k_n}$  ( $k_i = 1, 2, \dots, s$ ) werden solche Teilmengen der „Stärke  $d$ “ untersucht und konstruiert, in denen jede der  $s^d$  Kombinationen, die zu  $d$  beliebig gewählten vorderen Indizes gehören, gleich oft vorkommt, etwa  $\lambda$ -mal, wobei  $\lambda$  nicht von der Auswahl abhängen soll.

R. Sprague (Berlin).

Nash jr., John F.: Equilibrium points in  $n$ -person games. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 48—49 (1950).

Soit un jeu à  $n$  personnes, où chaque joueur possède un système fini de stratégies pures. Chacun d'entre eux ayant choisi une tactique de jeu, l'ensemble de ces tactiques constitue un  $n$ -uplet de stratégies pures. A tout  $n$ -uplet correspond un système défini de paiements entre les partenaires. L'A. considère chacun de ces  $n$ -uples comme un point. Il définit pour chaque point  $P$ , le  $n$ -uplet contraire,  $Q$ . Un point d'équilibre est un point self-contraire:  $P = Q$ . La correspondance  $P \rightarrow Q$  est un homomorphisme. Par application d'un théorème de Kakutani, le point d'équilibre est un point fixe du mapping.

A. Sade (Marseille).

Hammersley, J. M.: Further results for the counterfeit coin problems. Proc. Cambridge phil. Soc. **46**, 226—230 (1950).

Klassifikation von Münzen-Wägungs-Problemen. Verallgemeinerung und Lösung der von C. A. B. Smith (dies. Zbl. **29**, 197) dem Leser überlassenen schönen Aufgabe: Unter 13 Münzen befindet sich höchstens eine mit abweichendem Gewicht. Durch 3 (!) Wägungen (mit Gewichten) soll ermittelt werden, wieviel eine normale Münze wiegt, ob eine fehlerhafte darunter ist und, wenn ja, welche es ist und wieviel sie wiegt. Dabei ist im Voraus festzulegen, welche Münzen bei jeder Wägung auf die rechte bzw. linke Waagschale kommen.

R. Sprague (Berlin).



# Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

**Jacobsthal, Ernst:** Über eine Formel von Frobenius. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 14, 51—55 (1950).

Beweis der Determinantendarstellung für die Bernoullischen Zahlen  $B_n$ :  
 $(-1)^n B_n = |b_{\kappa, \lambda}|$

$$b_{\kappa, \lambda} = \begin{cases} \frac{n(\kappa - \lambda + 1) + \lambda - 1}{\kappa - \lambda + 2} & \text{für } \kappa \geq \lambda - 1 \\ 0 & \text{für } \kappa \leq \lambda - 2 \end{cases}$$

mit analytischen Hilfsmitteln. Diese Darstellung ist mit einer von Frobenius (S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1910, 835) angegebenen äquivalent. *Heinhold*.

**Jacobsthal, Ernst:** Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 24, 107—112 (1950).

Beweis einiger von Ljunggren (dies. Zbl. 30, 198) verwendeten Beziehungen zwischen Bernoullischen Zahlen. Diese Beziehungen folgen aus der für beliebige Polynome  $f$  gültigen symbolischen Gleichung  $\sum_{\lambda=0}^m f(mB + \lambda) = m f(B)$ , für die ein algebraischer Beweis geliefert wird. Weiterhin wird die Gleichung bewiesen

$$\sum_{a \in M, a \leq (m-1)/2} f(a + mB) = \frac{1}{2} \sum_{a \in M} f(a + mB) - \frac{1}{2} \varepsilon_{m/2} f(\frac{1}{2}m(1 + 2B)).$$

Dabei ist  $M$  eine Menge von mindestens zwei Zahlen  $a$ , die der Folge 1, 2, 3, . . .  $m-1$  angehören, so daß mit  $a$  auch stets  $m-a$  zu  $M$  gehört und  $\varepsilon_q = 0$  oder 1 für  $q \notin M$  bzw.  $q \in M$  ist. Hieraus folgen als Spezialfälle

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, m)=1}}^m (a + mB)^{2q} &= m B^{2q} \prod_{p|m} (1 - p^{2q-1}), \\ \sum_{\substack{a=1 \\ (a, m)=1}}^{[(m-1)/2]} (a + mB)^{2q} &= (\frac{1}{2}m) B^{2q} \prod_{p|m} (1 - p^{2q-1}). \end{aligned}$$

*Heinhold* (München).

**Barnett, I. A. and C. W. Mendel:** Generalized determinants of Vandermonde. Math. Z., Berlin 52, 723—734 (1950).

Es sei  $A$  die quadratische Matrix aus  $n^2$  unabhängigen Veränderlichen  $a_{ij}$ , und  $A^m = (a_{ij}^{(m)})$  für  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Die Verff. untersuchen die  $n$ -reihige Determinante

$$V_s^r(A; m_1, \dots, m_n) = \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1}^{(m_1)} & \dots & a_{r_n s_n}^{(m_1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r_1 s_1}^{(m_n)} & \dots & a_{r_n s_n}^{(m_n)} \end{vmatrix}.$$

Hierin bezeichnet  $\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}$  eine Menge von  $n$  verschiedenen geordneten Paaren  $(r_v, s_v)$  mit  $1 \leq r_v, s_v \leq n$ , die  $m_v$  sind natürliche Zahlen mit  $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_n$ . [Die Vandermondesche Determinante von  $x_1, \dots, x_n$  ist der Sonderfall  $V_s^r(X; 0, 1, \dots, n-1)$ , wobei  $X$  die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen  $x_1, \dots, x_n$  bedeutet und  $r_v = s_v = v$  zu wählen ist.] Bezeichnet  $|A|$  die Determinante von  $A$ , so gilt

$$V_s^r(A; m_1 + 1, \dots, m_n + 1) = |A| V_s^r(A; m_1, \dots, m_n),$$

$$V_s^r(A) = V_s^r(A; 0, 1, \dots, n-1) = V_s^r(A - xE),$$

$$V_s^r(A) = (-1)^n \frac{\partial(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial(a_{s_1 r_1}, \dots, a_{s_n r_n})} \text{ mit } |xE - A| = \sum_{q=0}^n c_q x^{n-q}.$$

Die Funktionaldeterminante verschwindet nicht identisch in den  $n^2$  Veränderlichen von  $A$ , falls mindestens einmal  $r_v = s_v$  ist; diese Aussage gilt auch für die Funktionaldeterminante einiger  $c_q$  nach ebenso vielen voneinander verschiedenen  $a_{ij}$ .  
*Wielandt* (Mainz).



**Taussky, Olga:** A recurring theorem on determinants. Amer. math. Monthly **56**, 672—676 (1949).

Es handelt sich um den wohl meistbewiesenen Satz der Matrixtheorie, daß die Determinante einer Matrix mit überwiegenden Hauptdiagonalelementen von 0 verschieden ist. Er ist für die verschiedensten Anwendungsgebiete zur Abschätzung von Eigenwerten von Bedeutung und wird daher immer wieder neu entdeckt und bewiesen. Verf. gibt eine kurze Darstellung mit einfachen Beweisen für Satz, Verallgemeinerungen und Folgerungen sowie ein Literaturverzeichnis, das den Zeitraum von 1881 bis 1949 mit über 30 Beiträgen umfaßt. Rohrbach (Mainz).

**Taussky, Olga:** A remark concerning the characteristic roots of the finite segments of the Hilbert matrix. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **20**, 80—83 (1949).

Der größte Eigenwert  $\lambda_n$  der  $n$ -reihigen Matrix  $((i+j)^{-1})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , konvergiert nach Hilbert für  $n \rightarrow \infty$  monoton wachsend gegen  $\pi$ . Die Güte der Konvergenz wird in der vorliegenden Arbeit durch  $\lambda_n = \pi + O(1/\log n)$  abgeschätzt. Der Beweis beruht darauf, daß dies die Größenordnung der zugehörigen quadratischen Form für den zu  $(1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n})$  proportionalen normierten Vektor ist. Wielandt (Mainz).

**Schwerdtfeger, H.:** On the Pfaffian invariant of a skew-symmetric matrix. Proc. Edinburgh math. Soc. II. S. **18**, 106—110 (1949).

Die Determinante  $|P|$  einer schiefsymmetrischen  $2m$ -reihigen Matrix  $P = ||p_{ik}||$  vom Range  $2m$  ist das Quadrat einer Form  $m$ -ten Grades  $U(p_{ik})$  der Elemente von  $P$ , die gewöhnlich als Pfaffscher Ausdruck oder „Pfaffian“ bezeichnet wird. Diese Form  $U(p_{ik})$  läßt sich als Determinante  $|U|$  einer  $2m$ -reihigen Matrix  $U$  darstellen, deren Elemente  $u_{(ik)}$  in der Gleichung  $P = \sum [u_{(1)}, u_{(2)}]$  auftreten, die  $P$  als Summe von  $m$  schiefsymmetrischen Matrices vom Range zwei ausdrückt. Durch eine kongruente Transformation läßt sich dann  $P$  auf die Normalform  $T'PT = I_{2m}$  transformieren, wo in  $I_{2m}$   $m$  Matrices  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  längs der Hauptdiagonale aneinandergereiht sind. — Verf. beweist die Eindeutigkeit von  $|U|$  mit Hilfe der Gruppe aller synektischen Matrices  $S$  mit  $S'PS = P$ , indem er  $|S| = 1$  mit Hilfe eines von C. L. Siegel [Math. Ann. **116**, 620 (1939)] bewiesenen Satzes nachweist. Für die Pfaffian von  $I_{2m}$  berechnet Verf. den Wert  $(-1)^{[m/2]}$ . Zum Schlusse wird erwähnt, daß  $|U|$  von  $\lambda P - Q$  bei regulärem  $P$  ein Polynom  $m$ -ten Grades in  $\lambda$  ist, das bezüglich der invarianten Faktoren von  $\lambda P - Q$  die Rolle des charakteristischen Polynoms  $|\lambda E - A|$  bei allgemeinen Matrices  $A$  übernimmt. Weitzenböck.

**Parodi, Maurice:** Sur une limite supérieure du rapport des valeurs caractéristiques de deux matrices symétriques, définies positives, à éléments réels, dont les éléments correspondants diffèrent peu. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 705—707 (1950).

$A$  und  $B$  seien  $n$ -reihige reelle Matrices von positiv-definiten quadratischen Formen,  $\lambda_i$  und  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ihre charakteristischen Zahlen. Es werden obere Schranken der Quotienten  $\mu_i/\lambda_i$  gesucht. Verf. gibt zwei solche Schranken an. Wird  $C = B - A$  gesetzt, und ist  $|c_{ij}| < \varepsilon$ , so ist  $1 + n\varepsilon \max_{j=1}^n |\alpha_{ij}|$  eine solche obere Schranke; hierin bedeuten die  $\alpha_{ij}$  die Elemente der zu  $A$  inversen Matrix  $A^{-1}$ . — Eine andere obere Schranke, bei welcher die Ermittlung der Elemente der inversen Matrix nicht erforderlich ist, wird mit Hilfe eines Satzes von Hadamard gewonnen. Sie ist  $1 + n\varepsilon / \left( \min \left[ a_{ii} - \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right] \right)$ , wobei der Strich am Summenzeichen andeutet, daß das Glied mit dem Index  $j = i$  auszulassen ist. Damit der Nenner des letzten Bruches positiv ist, muß der Matrix  $A$  so beschaffen sein, daß die Zahlen  $a_{ii} - \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sind. Quade (Hannover).



**Gouarné, René:** Méthode rapide de résolution de certains systèmes linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 844—846 (1950).

Verf. untersucht  $n$ -reihige symmetrische Matrizen  $A$ , deren Elemente durch  $a_{ik} = y$ , 1 oder 0, je nachdem  $|i - k| = 0, 1$  oder  $> 1$ , gegeben sind. Die Determinante einer solchen Matrix ist eine Kontinuante;  $\det A = P_n(y)$ , wobei  $P_0(y) = 1$ ,  $P_1(y) = y$  und  $P_n(y) = y P_{n-1}(y) - P_{n-2}(y)$ . Wegen  $P_n(2 \cos t) = \sin(n+1)t / \sin t$  lassen sich die Polynome  $P_n(y)$  durch die Tschebyscheffschen Polynome zweiter Art darstellen. — Die zu  $A$  inverse Matrix kann unmittelbar angegeben werden; wird  $A^{-1} = B$  gesetzt, so hat  $B$  die Elemente  $b_{ik} = b_{ki} = (-1)^{i+k} P_{i-1} P_{n-k} / P_n$ ,  $i \leq k$ . Auf Grund der eben beschriebenen Eigenschaften der Matrix  $A$  läßt sich jedes System von linearen Gleichungen vereinfachen, dessen Matrix einen  $q$ -reihigen quadratischen Minor ( $q < n$ ) enthält, der mit der  $q$ -reihigen Matrix  $A$  identisch ist; ist  $P_q(y) \neq 0$ , so kann jedes solche System auf eines mit  $n - q$  Unbekannten reduziert werden. Darüber hinaus zeigt Verf. an einem Beispiel aus der Atomphysik, in welcher Weise sich die Säkulargleichung beim Auftreten eines Minors der erwähnten Art vereinfacht. Quade (Hannover).

**Sircar, H.:** On a system of equations. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. 8, 101—105 (1949).

Beweis des Satzes: Ist  $n > 2$ ,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, a_{ik} = a_{ki}, |a_{ik}| = 0, \begin{vmatrix} A_1 & \dots & A_n & U \\ u_1 & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

sind ferner die  $a_{ik}$  und  $u_i$  reell und ist  $p$  beliebig, so ist das System von  $n + 2$  Gleichungen in den  $l_i$ , das durch Nullsetzen aller  $n + 1$  reihigen Determinanten der Matrix  $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n & U & L \\ l_1 & \dots & l_n & p & 0 \end{pmatrix}$  erhalten wird, zwei Gleichungen äquivalent, von denen die eine linear ist, die andere ein gewisses  $l_i$  überhaupt nicht enthält und in den übrigen quadratisch ist. Die beiden Gleichungen werden explizit aufgestellt; sie sind von  $p$  unabhängig. Lochs (Innsbruck).

**MacDuffee, C. C.:** Some applications of matrices in the theory of equations. Amer. math. Monthly **57**, 154—161 (1950).

Verf. benützt die bekannten Tatsachen der Matrizenrechnung dazu, die Theorie der algebraischen Gleichungen zu entwickeln, so weit diese algebraischer Natur ist und nicht auf die numerische Berechnung der Wurzeln hinausläuft. Den Ausgangspunkt bildet die bekannte Tatsache, daß immer leicht eine Matrix  $A$  („companion matrix“) angegeben werden kann, welche Wurzel einer vorgegebenen algebraischen Gleichung  $f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$  ist; das erfüllt z. B. die Matrix  $A$ , welche in den  $n - 1$  ersten Spalten unter der Hauptdiagonale eine 1, sonst lauter Nullen enthält und in deren letzter Spalte die Elemente  $-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1$  von oben nach unten angeordnet stehen. Es ist bekanntlich die charakteristische Gleichung dieser Matrix  $|xE - A| \equiv f(x) = 0$ , ferner  $f(A) = 0$ , und die charakteristischen Wurzeln von  $A$  sind eben die Wurzeln  $r_1, r_2, \dots, r_n$  von  $f(x) = 0$ . Der Satz von Frobenius sagt aus, daß die Matrix  $g(A)$  die charakteristischen Wurzeln  $g(r_1), \dots, g(r_n)$  besitzt. Das kann für die Ausführung von Tschirnhaus-Transformationen benützt werden, denn die Gleichung  $|yE - g(A)| \equiv F(y) = 0$  geht durch die Tschirnhaus-Transformation  $y = g(x)$  aus  $f(x) = 0$  hervor. Es ist  $(-1)^n |g(A)| = g(r_1) \dots g(r_n)$ , daher ist die Matrix  $g(A)$  dann und nur dann singular, wenn  $f(x) = 0$  und  $g(x) = 0$  eine gemeinsame Wurzel besitzen (Resultante), und zwar ist die Ordnung der Singularität gleich der Anzahl der gemeinsamen Wurzeln. — Setzt man  $|f(A + yE)| \equiv y^n R(y^2)$ , so ist  $R(z) = 0$  eine Gleichung des Grades  $(n^2 - n)/2$ , deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen  $(r_i - r_k)^2$  sind.



Insbesondere ist  $R(0)$  bis auf das Vorzeichen gleich der Diskriminante von  $f(x) = 0$ . Diese kann aber auch einfacher als Resultante von  $f(x) = 0$  und  $f'(x) = 0$  so geschrieben werden:  $(-1)^n |f'(A)|$ , wobei genauer gilt: Der Rang von  $f'(A)$  ist gleich der Anzahl der verschiedenen Wurzeln von  $f(x) = 0$ . Schließlich folgt noch eine sehr interessante und auch praktisch nutzbare Darstellung der symmetrischen Funktionen der Wurzeln: Setzt man  $g(x) = 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_e x^e$  und entwickelt  $(-1)^n |g(A)|$  nach den Potenzprodukten der Unbestimmten  $\lambda$ , so ist der Koeffizient von  $\lambda_{e_1} \lambda_{e_2} \dots \lambda_{e_k}$  gleich der symmetrischen Funktion  $\Sigma r_1^{e_1} r_2^{e_2} \dots r_k^{e_k}$  ( $e = e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_k$ ). Gröbner (Innsbruck).

**Erdős, P. and P. Turán:** On the distribution of roots of polynomials. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 105—119 (1950).

Soit  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients complexes, et posons  $P = \frac{|a_0| + \dots + |a_n|}{\sqrt{|a_0 a_n|}}$ . Soient  $z_v = r_v e^{i\varphi_v}$  ( $1 \leq v \leq n$ ) les racines de ce polynôme; les Au., par un ingénieux raisonnement, montrent que lorsque  $n$  croît indéfiniment, si  $P$  n'est pas „trop grand“, les arguments  $\varphi_v$  sont également répartis entre 0 et  $2\pi$ . De façon précise, ils établissent l'inégalité

$$\left| \left( \sum_{x \leq \varphi_v \leq \beta} 1 \right) - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} n \right| < 16 \sqrt{n \log P}.$$

Ce théorème comprend comme cas particuliers: <sup>10</sup> le théorème de E. Schmidt [S.-B. Preuss. Akad. Wiss., Berlin 1932, 321] montrant que le nombre des racines réelles de  $f$  est  $O(\sqrt{n \log P})$ ; <sup>20</sup> la généralisation, due à Szegő, du théorème de Jentzsch sur les zéros des polynômes sections d'une série entière ayant le cercle  $|z| = 1$  comme cercle de convergence, d'après laquelle, pour une infinité de degrés  $n_k$ , les racines du polynôme section de degré  $n_k$  sont également réparties en argument dans un anneau  $1 - \varepsilon \leq |z| \leq 1 + \varepsilon$  d'épaisseur arbitrairement petite. J. Dieudonné (Nancy).

**Neuhaus, Friedrich Wilhelm:** Über die Verteilung aller ganzzahligen Gleichungen von mehr als zwei Unbestimmten auf ihre Galoisschen Gruppen. Math. Ann., Berlin 121, 379—404 (1950).

Das Ziel der Untersuchungen ist, bei Gleichungen mit drei oder mehr Unbestimmten, also im einfachsten Falle bei Gleichungen der Form  $f(x; y, t) = 0$ , Bedingungen dafür anzugeben, daß eine im Unbestimmtenbereich  $P(y, t)$  für die Gleichung  $f(x; y, t) = 0$  geltende algebraische Eigenschaft für unendlich viele ganze  $y^*$  erhalten bleibt. Diese Eigenschaft, die für  $f(x; y, t) = 0$  im Unbestimmtenbereich vorausgesetzt ist, ist die Affektlosigkeit. Die angeführten Sätze gelten auch für Gleichungen, in denen mehr als drei Unbestimmte vorkommen, also allgemein für Gleichungen der Form  $f(x; y, t_1, \dots, t_r) = 0$ . — Bezeichne  $P$  den komplexen Körper. Die Hauptresultate des ersten Teiles der Arbeit sind die folgenden Sätze: 1. Eine in  $P(y, t)$  affektlose Gleichung  $f(x; y, t) = 0$  erfährt dann und nur dann für unendlich viele komplexe  $y^*$  und damit für fast alle komplexen  $y^*$  eine Reduktion der Galoisschen Gruppe, wenn die Diskriminante von  $f(x; y, t) = 0$  sich in  $P(y, t)$  in ein Produkt von folgender Form aufspalten läßt:  $D(y, t) = d(y) \cdot D(y, t)^2$ , wobei  $d(y)$  ein Polynom von  $y$  ohne quadratischen Faktor und  $D(y, t)$  ein Polynom in  $y$  und  $t$  ist. — 2. Eine in  $P(y, t)$  affektlose Gleichung  $f(x; y, t) = 0$  ist sicher dann für fast alle komplexen  $y^*$  in  $P(t)$  eine alternierende Gleichung, wenn a) die Diskriminante die Form hat  $D(y, t) = d(y) \cdot D(y, t)^2$ , wobei  $d(y)$  ein Polynom von  $y$  ohne quadratischen Faktor ist, b) der höchste Grad von  $t$  nicht in dem von  $x$  freien Glied der Gleichung steckt. — Die in diesen Sätzen angegebene Struktur der Diskriminante wird dann und nur dann eintreten, wenn  $f(x; y, t) = 0$  durch Ad-



junktion einer algebraischen Funktion von  $y$  allein eine Reduktion erfährt. Genügt aber eine algebraische Funktion von  $y$  nicht, um eine Reduktion zu bewirken, muß man also eine algebraische, nicht rationale Funktion von  $t$ , oder im allgemeinen eine algebraische Funktion von beiden Unbestimmten  $y$  und  $t$  adjungieren, um die Gruppe zu reduzieren, so kann es höchstens endlich viele komplexe  $y^*$  geben, für die  $f(x; y^*, t) = 0$  über  $P(t)$  einen Affekt hat. — Bezeichne  $P$  den rationalen Zahlkörper. — 3. Eine in  $P(y, t)$  affektlose Gleichung  $f(x; y, t) = 0$  erhält höchstens dann für unendlich viele ganze  $y^*$  in  $P(t)$  einen Affekt, wenn die Diskriminante als Produkt von folgender Form mit ganzrationalen Koeffizienten geschrieben werden kann:  $D(y, t) = d(y) \cdot \bar{D}(y, t)^2$ , wobei  $d(y)$  ein Polynom von  $y$  ohne quadratischen Faktor und  $D(y, t)^2$  das Quadrat eines Polynoms von  $y$  und  $t$  ist. Im zweiten Teil der Arbeit wird gezeigt, daß die Affektlosigkeit, die im ersten Teil stets vorausgesetzt war, eine äußerst schwache Voraussetzung bedeutet. Es stellt sich heraus, daß es in der allgemeinen Gleichung

$$x^n + a_1(t) x^{n-1} + a_2(t) x^{n-2} + \dots + a_n(t) = 0,$$

in der die  $a_i(t)$  beliebige ganzzahlige Polynome von  $t$  sind, im wesentlichen nur auf zwei numerische Koeffizienten in zwei verschiedenen der  $a_i(t)$  ankommt, bei denen man nur höchstens endlich viele Ausnahmewerte vermeiden muß, um eine affektlose Gleichung in  $P(t)$  zu erhalten. Szép (Szeged).

Walls, Nancy: A note on an identity of Jacobi's. Edinburgh math. Notes 37, 7—9 (1949).

Es seien  $a_\mu$  die elementarsymmetrischen,  $h_\mu$  die vollständigen symmetrischen (Alef-)Funktionen  $\mu$ -ten Grades von  $x_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ;  $a_0 = h_0 = 1$ ;  $h_\mu = 0$  für  $\mu < 0$ ) und  $a_{\mu\nu}$  die elementarsymmetrischen Funktionen derselben Elemente mit Ausschluß von  $x_\nu$ . Ferner sollen  $r_1, r_2, \dots, r_n$  verschiedene nicht negative ganze Zahlen und  $A = (a_{ik})$ ,  $H = (h_{ik})$ ,  $H' = (h'_{ik})$  quadratische  $n$ -reihige Matrizen mit

$$\alpha_{ik} = (-1)^{k-1} a_{k-1, i}; \quad h_{ik} = h_{r_k - i + 1}; \quad h'_{ik} = x_i^{r_k}$$

bedeuten. Für das spezielle Zahlensystem  $r_k = k - 1$  seien die beiden letzteren durch  $H_0$  und  $H'_0$  bezeichnet. Verf. zeigt auf einfache Weise mit Hilfe von erzeugenden Funktionen, daß  $AH = H'$  ist, woraus wegen  $AH_0 = H'_0$  und  $|H_0| = 1$  sofort die Jakobische Identität  $|H'_0| \cdot |H| = |H'|$  folgt. Ein Weg zu möglichen Verallgemeinerungen wird angedeutet. Schönhardt (Stuttgart).

Throumoulopoulos, L.: Über die Unmöglichkeit der Identität  $X^\mu + Y^\nu = 1$ . Bull. Soc. math. Grèce 14, 73—75 (1949) [Griechisch].

Die Identität  $X^\mu + Y^\nu = 1$  ( $\mu, \nu$  ganz  $> 0$ ,  $1/\mu + 1/\nu \leq 1$ ) kann unmöglich durch Polynome erfüllt werden. Dinghas (Berlin).

Arnold, B. H.: A topological proof of the fundamental theorem of algebra. Amer. math. Monthly 56, 465—466 (1949).

Der Fundamentalsatz der Algebra soll aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz abgeleitet werden statt, wie es häufig geschieht, aus der Betrachtung von Umlaufzahlen. Leider ist die Abbildung, auf die der Fixpunktsatz angewandt wird, nicht stetig: es wird  $z = r e^{i\vartheta}$  ( $0 \leq \vartheta < 2\pi$ ) gesetzt, und  $\vartheta$  geht so in die Abbildung ein, daß der Sprung bei  $z < 0$  nicht unschädlich bleibt. H. Kneser (Tübingen).

Mignosi, Giuseppe: Ancora sopra una estensione ai corpi finiti di una formula di Radòs. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 7, 284—289 (1950).

Im ersten Teil der Arbeit gibt Verf. für die Anzahl  $\varrho$  der Wurzeln der Gleichung  $f(x) = q$  in einem endlichen Körper der Charakteristik  $p$  mit  $N$  Elementen die Formel

$$\varrho = N - 1 + \sum_{r=0}^{N-1} \beta_r q^{N-1-r}.$$



Dabei ist (1)  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x$ ,

$$(2) \quad \alpha_k^{(r)} = \sum \{ r! a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}} / (i_0! i_1! \dots i_{n-1}!) \},$$

wo die Summe über alle nicht negativen ganzen Zahlen  $i_v$  zu erstrecken ist, die  $\sum_{v=0}^{n-1} i_v = r$ ,  $nr - \sum_{v=1}^{n-1} v i_v = r + k$  erfüllen und

$$(3) \quad \beta_r = \alpha_0^{(r)} + \alpha_{N-1}^{(r)} + \alpha_{2(N-1)}^{(r)} + \dots + \alpha_{[(n-1)r/(N-1)](N-1)}^{(r)},$$

wo die eckige Klammer das größte Ganze bedeutet. (4) Es ergibt sich für die Summe immer eine Zahl des Primkörpers der Charakteristik  $p$  (Restklassenrings mod  $p$ ), die auf eine in der Abhandlung nicht ersichtliche Art durch eine negative ganze Zahl der betreffenden Restklasse zu ersetzen ist. — Spezialisierung der Formel auf die Gleichung  $x^n = q$ , wo bekanntlich o. B. d. A.  $n$  als Teiler von  $N-1$  angenommen werden kann, gibt, da hier vorgenannte Art der Ersetzung leicht klar wird, eine Reihe bekannter Ergebnisse. Unabhängig davon leitet Verf. ab: 1. Die elementarsymmetrischen Funktionen aller  $q_j$ , wo  $x^n = q_j$  lösbar ist (der  $n$ -ten Potenzreste), sind null. 2. Das Produkt aller dieser  $q_j$  wird  $-(-1)^{(N-1)/n}$ . Holzer (Graz).

### Verbände. Ringe. Körper:

Schwan, W.: Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden. Math. Z., Berlin **52**, 150—167 (1949).

Schwan, W.: Ein Homomorphiesatz der Theorie der Verbände. Math. Z., Berlin **52**, 193—201 (1949).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. **30**, 197 und **31**, 107) studiert Verf. in einem beliebigen Verbands  $V$  Fragen im Zusammenhang mit der „Überspektivität“:

$$(*) \quad x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \quad y = (a \cup x) \cap (b \cup x).$$

Aus der Fülle der Einzelresultate sei hervorgehoben: (\*) ist eine Isomorphie zwischen den Teilbänden  $\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$  und  $\frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}$  (dabei bedeutet z. B.  $X \vee Y$  die Menge der Elemente  $x \cup y$  mit  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ). (\*) steht im Zusammenhang mit den beiden „Schwesterperspektivitäten“:

$$(1) \quad x_1 = a \cap y_1, \quad y_1 = b \cup x_1; \quad (2) \quad x_2 = b \cap y_2, \quad y_2 = a \cup x_2.$$

Die Zwischenreiehe (Quotientenverbände)  $y_1/x_1$  und  $y_2/x_2$  von (1) und (2) liefern durch  $x = x_1 \cup x_2$ ,  $y = y_1 \cap y_2$  gerade die Zwischenreiehe  $y/x$  von (\*). Als nützlich erweisen sich u. a. folgende Begriffe:  $z$  heißt nach  $a, b$  zerlegbar, wenn  $z$  nach  $a, b$  progressiv und regressiv zerlegbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das Umreih  $Tz Sz$  für  $Sz = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ ,  $Tz = (a \cup z) \cap (b \cup z)$  aus  $z$  allein besteht. Allgemeiner heißt  $z$  fastzerlegbar nach  $a, b$ , wenn  $z$  einem kleinsten Umreih  $Tz Sz$  angehört, d. h., wenn für jedes  $w$  aus  $Tw Sw \subset Tz Sz$  die Gleichheit dieser Umreie folgt.  $a, b$  heißen zerlegend, wenn jedes bezüglich  $a, b$  fastzerlegbare Element zerlegbar ist. Die Menge  $F(a, b)$  der nach  $a, b$  fastzerlegbaren Elemente bildet nach einer Restklassenbildung einen Teilbund von  $V$ .  $F(a, b)$  ist genau dann ein Teilverband von  $V$ , wenn  $\frac{a}{a \wedge b}, \frac{b}{a \wedge b}, \frac{a \vee b}{a}, \frac{a \vee b}{b}$  Teilverbände von  $V$  sind. Hermes.

Rieger, Lad.: A note on topological representations of distributive lattices. Časopis Mat. Fys., Praha **74**, 55—60 und tschechische Zusammenfassg. 60—61 (1949).

Verf. zeigt, daß der schon von Stone [Časopis Mat. Fys., Praha **67**, 1—25 (1937); dies. Zbl. **18**, 3] betrachtete bikompakte  $T_0$ -Raum  $\mathfrak{S}_L$  aller Prim- $\Delta$ -Ideale eines distributiven Verbandes mit 0 und 1 eine offene Basis  $R'$  besitzt mit den beiden Eigenschaften: (1) Jedes Teilsystem  $R''$  von  $R'$  hat einen nichtleeren Durchschnitt,



falls dies für je endlich viele Elemente von  $R''$  gilt; (2)  $Q' \subset R'$  ist stets ein vollständiges Umgebungssystem für ein  $P \in \mathfrak{S}_L$ , falls (a)  $\prod_{P \in \mathfrak{U} \in R'} \mathfrak{U} = \prod_{\mathfrak{U} \in Q'} \mathfrak{U}$ , und es (b) ein  $\mathfrak{U}_3 \in Q'$  gibt, so daß aus  $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in Q'$  stets folgt  $\mathfrak{U}_3 \in \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2$ . Umgekehrt gewinnt man jeden bikompakten  $T_0$ -Raum mit einer derartigen offenen Basis aus dem Verband der endlichen Vereinigungen und Durchschnitte (zusätzlich 0 und 1) der Basiselemente. Ein distributiver Verband mit 0 und 1 ist eine Boolesche Algebra, falls alle Prim- $\alpha$ -Ideale maximal sind. *Hermes (Münster).*

**Balachandran, V. K.:** Prime ideals and the theory of last-residue-classes. *J. Indian math. Soc.*, n. S. **13**, 31—40 (1949).

$L$  sei ein distributiver Verband mit 0 und 1. Die 0 enthaltende Restklasse  $A_\alpha^*$  nach einem  $\alpha$ -Ideal  $A_\alpha$  heißt last-residue-class von  $A_\alpha$ . Dual für ein  $\mu$ -Ideal  $B_\mu$ .  $A_\alpha^*$  ist der Durchschnitt aller minimalen zu  $A_\alpha$  disjunkten  $\mu$ -Ideale. Jedes  $A_\alpha^*$  ist ein  $B_\mu$  und umgekehrt. Verf. charakterisiert die  $A_\alpha$ , welche ein  $B_\mu^*$  sind. Ein  $A_\alpha \neq 1$  ist genau dann halbeinfach [d. h.  $A_\alpha^{**} = A_\alpha$  nach Vaidyanathaswamy, *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A*, **16**, 379—386 (1942)], wenn jeder teilerlose Faktor von  $A_\alpha^*$  zu  $A_\alpha$  fremd ist.  $L$  ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn jedes prime  $\alpha$ -Ideal teilerlos ist, oder wenn jedes prime  $\alpha$ -Ideal minimal ist. Dual für die  $\mu$ -Ideale. *Hermes (Münster).*

**Dilworth, R. P.:** The structure of relatively complemented lattices. *Ann. Math.*, Princeton, II. S. **51**, 348—359 (1950).

Es sei  $L$  ein Verband und  $\Theta(L)$  die Gesamtheit der Kongruenzrelationen (K. r.) in  $L$ . Es wird bewiesen, daß  $\Theta(L)$  unter der teilweisen Ordnung:  $\theta \leq \varphi$  dann und nur dann, wenn aus  $x \equiv y(\theta)$  die Kongruenz  $x \equiv y(\varphi)$  folgt, einen vollständigen und distributiven Verband bildet. Man definiert: zwei K. r. permutieren, wenn man aus  $a \equiv b(\theta)$ ,  $b \equiv c(\varphi)$  folgern kann, daß es ein  $d \in L$  mit  $a \equiv d(\varphi)$ ,  $d \equiv c(\theta)$  gibt. Die Menge  $\Gamma(L)$  aller K. r., die mit allen K. r. von  $\Theta(L)$  permutieren, heißt das Zentrum von  $\Theta(L)$ . Nun gelten die Sätze: ein Verband ist dann und nur dann (1) direkte Vereinigung von einer endlichen Anzahl einfacher Verbände, wenn  $\Gamma(L) = \Theta(L)$  und  $\Theta(L)$  eine endliche Boolesche Algebra ist, (2) subdirekte Vereinigung endlich vieler einfacher Verbände, wenn  $\Theta(L)$  eine endliche Boolesche Algebra ist. In relativ-komplementären (r.-k.) Verbänden kann man über die K. r. viel mehr aussagen, z. B.: alle K. r. permutieren; wenn  $L$  einen der Kettensätze erfüllt, erfüllt ihn auch  $\Theta(L)$ . Ein interessanter Struktursatz ist der folgende: Ein r.-k. Verband, der die Maximalbedingung erfüllt, ist direkte Vereinigung von endlich vielen einfachen r.-k. Verbänden. Dies verallgemeinert einen bekannten Satz von Birkhoff-Menger: ein endlich-dimensionaler, komplementärer, modularer Verband ist direkte Vereinigung von endlich vielen einfachen, komplementären, modularen Verbänden. Für r.-k. Verbände  $L$  mit einem der Kettensätze erhält man:  $L$  ist dann und nur dann einfach, wenn je zwei Primquotienten in  $L$  projektiv sind. Zum Schluß werden Verbände untersucht, die r.-k. im kleinen sind, d. h. bei denen die Quotientenverbände  $u_a/a$  und  $a/z_a$  für jedes  $a$  r.-k. sind, wobei  $u_a$  die Vereinigung aller oberen Nachbarn,  $z_a$  den Durchschnitt aller unteren Nachbarn von  $a$  bezeichnet. Verf. beweist, daß jeder derartige Verband von endlicher Dimension subdirekte Vereinigung von endlich vielen einfachen Verbänden ist, die auch r.-k. im kleinen sind. *L. Fuchs (Budapest).*

**Iseki, Kiyoski:** Une condition pour qu'un lattice soit distributif. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **230**, 1726—1727 (1950).

Eine Untermenge  $F$  eines Verbandes  $L$  mit 0 nennt Verf. „filtre“ (f.), wenn (1)  $0 \notin F$ , (2) aus  $a, b \in F$  folgt:  $a \cap b \in F$ , (3) aus  $a \in F$  und  $a \leq x$  folgt:  $x \in F$ . Ein f.  $F$  ist prim, wenn aus  $a \cup b \in F$  entweder  $a \in F$  oder  $b \in F$  folgt; es ist maximal, wenn es  $\neq L$  ist und in keinem anderen  $\neq L$  enthalten ist; es ist irreduzibel, wenn aus  $F_1 \wedge F_2 = F$  ( $\wedge$ : der mengentheoretische Durchschnitt) entweder  $F_1 = F$



oder  $F_2 = F$  folgt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Verband  $L$  distributiv sei, ist, wie Verf. beweist, daß jedes  $f$ , das irreduzibel ist, prim sei. Es wird auch bewiesen, daß ein distributiver Verband mit 0 und 1 dann und nur dann eine Boolesche Algebra ist, wenn jedes  $f$ , das irreduzibel ist, zugleich maximal ist.

*L. Fuchs* (Budapest).

**Raffin, Raymond:** Sur certaines propriétés de commutation dans les anneaux monogènes. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 904—906 (1950).

Verf. betrachtet nichtassoziative Ringe, die durch ein einziges Element erzeugt (monogène) sind und deren Charakteristik zu 2 prim ist. Die Untersuchung ist eine Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **35**, 18); aber statt der Forderung der Gleichung  $(xy)x = x(yx)$  für jedes  $x, y$  werden jetzt schwächere Bedingungen vorausgesetzt. Es wird untersucht, was bezüglich der Kommutatoren von Potenzen eines Elementes bei speziellen, die Assoziativität ersetzenden Bedingungen gefolgert werden kann.

*L. Fuchs* (Budapest).

**Artin, Emil:** The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra. Bull. Amer. math. Soc. **56**, 65—72 (1950).

Verf. greift aus dem Lebenswerk Wedderburns zwei bahnbrechende Leistungen, den Struktursatz für einfache hyperkomplexe Systeme und den Kommutativitätssatz der endlichen Schiefkörper heraus. Im Hauptteil der Note wird in vorbildlicher Weise zunächst die historische Stellung des Struktursatzes herausgearbeitet und dann die an ihn anknüpfende Weiterentwicklung skizziert. Den Höhepunkt der Arbeit bildet ein geometrisch anschaulicher, logisch äußerst durchsichtiger Beweis der Chevalley-Jacobson'schen Ausdehnung des Struktursatzes auf alle treuen Linksmultiplikatorringe einfacher Moduln. Auch die Bemerkungen zum Kommutativitätssatz der Schiefkörper — Deutung des Wedderburn'schen Theorems als Spezialfall einer allgemeineren diophantischen Eigenschaft kommutativer Körper im Hinblick auf gewisse Untersuchungen von Tsen und Chevalley [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1933**, 335—339; dies. Zbl. **7**, 294; bzw. Abhandl. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 73—75 (1935); dies. Zbl. **11**, 145] — verdienen größtes Interesse.

*Krull* (Bonn).

**Kaplansky, Irving:** Elementary divisors and modules. Trans. Amer. math. Soc. **66**, 464—491 (1949).

Zweck der Arbeit ist in erster Linie die Verschärfung bekannter Ergebnisse über Matrizen und Moduln in i. a. nichtkommutativen Ringen mit Einheitsselement durch Elimination üblicher, aber tatsächlich überflüssiger Voraussetzungen (Endlichkeitsannahmen, Kommutativität, Nullteilerfreiheit usw.; über die Möglichkeit, wenigstens teilweise ohne Einheitsselement auszukommen, vgl. Nr. 8 der Arbeit). Grundlegend für die Untersuchungen sind die Begriffe des Hermiteschen Ringes und des E.T.-Ring (Elementarteilerrings).  $R$  heißt rechts-Hermiteisch, wenn zu jeder einzeiligen, zweispaltigen Matrix  $\|a, b\|$  eine zweigradige, unimodulare Matrix  $U$  existiert, derart, daß  $\|a, b\| \cdot U = \|d, 0\|$ . In entsprechender Weise wird „links-Hermiteisch“ definiert; „Hermiteisch“ schlechtweg bedeutet so viel wie „gleichzeitig rechts- und links-Hermiteisch“.  $R$  wird E.T.-Ring genannt, wenn es über  $R$  zu jeder rechteckigen Matrix  $A$  zwei quadratische, unimodulare Matrizen  $U, V$  gibt, derart, daß  $U \cdot A \cdot V = B = \|b_{ik}\|$  Diagonalmatrix wird [ $b_{ik} = 0$  ( $i \neq k$ )], wobei  $b_{ii}$  stets gleichzeitiger Links- und Rechtsteiler von  $b_{i+1, i+1}$  ist. — Offenbar ist in einem rechts-Hermiteischen Ringe jedes endliche Rechtsideal Hauptideal  $[(a_1, \dots, a_n) \cdot R = (b) \cdot R]$ , und es muß jeder E.T.-Ring schlechtweg Hermiteisch sein. Darüber hinaus beweist Verf. vor allem die folgenden Sätze: Ein nullteilerfreier Ring ist dann und nur dann Hermiteisch, wenn die Summe und der Durchschnitt irgend zweier Rechts- bzw. Links-Hauptideale stets wieder ein Rechts- bzw. Links-Hauptideal ist. Gleichzeitig mit  $R$  ist stets auch der Ring  $R_n$  aller Matrizen  $n$ -ten Grades über  $R$  rechts-Hermiteisch. Über dem rechts-Hermi-



teschen Ringe  $R$  gibt es zu jeder rechteckigen Matrix  $A$  eine unimodulare Matrix  $U$ , derart, daß  $A \cdot U = ||b_{ik}||$  rechts-Halbdiaagonalform hat [ $b_{ik} = 0$  ( $i < k$ )]. Ein Hermitescher Ring  $R$  ist ein E.T.-Ring, wenn in ihm keine unendliche Elementfolge  $a_1, a_2, \dots$  existiert, bei der für jedes  $i$  mindestens eine der beiden Beziehungen  $a_i \cdot R \subset a_{i+1} \cdot R$ ,  $R \cdot a_i \subset R \cdot a_{i+1}$  erfüllt ist („Gemischter Kettensatz“).  $R$  ist bereits dann E.T.-Ring, wenn jede 2-gradige Matrix in der gewünschten Weise auf Diagonalform transformiert werden kann. Ein kommutativer Ring, dessen Nullteiler alle dem Jacobson'schen Radikal angehören, ist dann und nur dann ein E.T.-Ring, wenn 1. alle endlichen Ideale Hauptideale sind und außerdem 2. unter der Voraussetzung  $(a, b, c) = 1$  stets  $p$  und  $q$  so bestimmt werden können, daß auch  $(p \cdot a, p \cdot b + q \cdot c) = 1$ . Die übliche Reduktion alternierender Matrizen durch Kongruenztransformationen kann ohne zusätzliche Endlichkeitsvoraussetzung in jedem kommutativen Hermiteschen Ring durchgeführt werden. — Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich zunächst mit (Rechts-)Moduln über einem beliebigen Ringe  $R$ , wobei insbesondere eine hinreichende Bedingung für die direkte Zerlegbarkeit eines Moduls in endlich viele zyklische Komponenten aufgestellt wird. Dann werden Matrizen und Moduln über Bewertungsringen betrachtet sowie die bekannten Struktursätze über kommutative Hauptidealringe ergänzt. Den Schluß bilden Bemerkungen über unendliche Moduln und Matrizen, z. B. der Satz, daß jede Matrix über einem primären Ring mit Minimalbedingung zu einer anderen äquivalent ist, die in jeder Zeile und Spalte höchstens ein von 0 verschiedenes Element enthält. — Am bemerkenswertesten sind im zweiten Teil wohl die Untersuchungen über Bewertungsringe, d. h. über solche Ringe, in denen von zwei Elementen  $a, b$  stets mindestens eines gleichzeitig Rechts- und Linksteiler des anderen ist (naheliegende Verallgemeinerung der ursprünglichen Krull'schen Definition durch Zulassung von Nichtkommutativität und Nullteilern). Hier kann z. B. ein Eindeutigkeitssatz für Moduln bewiesen werden, die sich als direkte Summen von beliebig vielen zyklischen Summanden darstellen lassen. Vor allem aber wird im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. [Duke Math. J. 9, 303—321 (1942)] eine durch das Auftreten einer einschneidenden Maximalitätsbedingung sehr interessante, notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt, der ein Bewertungsintegritätsbereich  $R$  genügen muß, wenn jeder  $R$ -Rechtsmodul mit zweigliedriger Basis als direkte Summe zyklischer Moduln darstellbar sein soll.

Krull (Bonn).

Rédei, L. und T. Szele: Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe. II. Acta math., København 82, 209—241 (1950).

Die vorliegende Arbeit ist zwar ein „zweiter Teil“ (zum ersten vgl. dies. Zbl. 29, 247); aber die Grundgedanken sind wesentlich schärfer herausgearbeitet als früher, ein Rückgriff auf die ältere Untersuchung ist nirgends nötig, und die wichtigsten Ergebnisse des ersten Teils werden mit vereinfachten Beweisen wieder gewonnen. — Gegenstand der Betrachtung sind kommutative Ringe mit oder ohne Einheitselement. Eine eindeutige Abbildung des Ringes  $R$  auf eine beliebige Untergruppe wird als  $R$ -Funktion bezeichnet.  $R$  heißt abgeleiteter Ring von  $T$ ,  $T$  Primitivring von  $R$ , wenn in  $T$  ein Unterring  $S$ , der Vermittlerring, und ein (nicht notwendig von  $(0)$  verschiedenes)  $S$ -Ideal  $a$  so bestimmt werden können, daß  $S/a$  zu  $R$  isomorph wird. Eine bestimmte  $R$ -Funktion  $f$  wird durch ein  $T$ -Polynom darstellbar genannt, wenn sich bei passender Wahl des Vermittlering  $S$  und des zugehörigen Ideals  $a$  ein den Bedingungen  $p(a) \in S$  ( $a \in S$ );  $p(a) = p(b)$  ( $a \in S, b - a \in a$ ) genügendes Polynom  $p(x)$  aus  $T[x]$  finden läßt, derart, daß die durch  $a + a \rightarrow p(a) + a$  ( $a \in S$ ) definierte  $(S/a)$ -Funktion bei geeigneter isomorpher Abbildung von  $S/a$  auf  $R$  gerade in die  $R$ -Funktion  $f$  übergeht. Der primitive Ring  $T^*$  wird als optimal (relativ  $S$ ) bezeichnet, wenn jede  $R$ -Funktion, die durch irgendein  $T$ -Polynom darstellbar ist, auch durch ein  $T^*$ -Polynom dargestellt werden kann. Sind überhaupt alle  $R$ -Funktionen durch  $T^*$ -Polynome



darstellbar, so heißt  $T^*$  ein Darstellungsring von  $S$ . — Auf Grund dieser Begriffsbildungen beweisen Verff. vor allem die folgenden Sätze: Nur für einen Ring von einer Charakteristik  $p^e$  ( $p$  Primzahl) kann ein Darstellungsring existieren. Der Körper  $K_0$  der rationalen Zahlen ist Darstellungsring für alle Ringe, die hinsichtlich der Addition eine zyklische  $p$ -Gruppe bilden.  $K_0$  ist optimaler primitiver Ring für alle abgeleiteten Ringe. — Weiter werden insbesondere die Restklassenringe  $G_0/m$  des Ringes  $G_0$  der ganzen rationalen Zahlen nach einem von 0 verschiedenen Modul  $m$  untersucht. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gefunden, daß eine  $(G_0/m)$ -Funktion durch ein  $K_0$ - bzw.  $(G_0/m)$ -Polynom dargestellt werden kann, und es werden für den Fall einer Primzahlpotenz  $m = p^e$  die Grade und die Koeffizientennenner näher bestimmt, die bei den Darstellungen der  $(G_0/m)$ -Funktionen durch  $K_0$ -Polynome auftreten. — Die Beweise stützen sich auf zwei grundlegende Hilfssätze, die ihrerseits durch elementare, wenn auch keineswegs immer einfache differenzentheoretische Betrachtungen gewonnen werden: Hilfssatz 1. Bei der durch  $a_n = 1$  ( $n \equiv 1 (p^e)$ ),  $a_n = 0$  ( $n \not\equiv 1 (p^e)$ ) definierten unendlichen Folge ist die  $(r \cdot p^e - (r-1) \cdot p^{e-1} - 1)$ -te Differenzenfolge modulo  $p^r$  konstant ( $e, r = 1, 2, \dots$ ). Hilfssatz 2. Ist  $m$  keine Primzahlpotenz,  $d > 1$  ein Teiler von  $m$ , so besitzt die durch  $a_n = 1$  ( $n \equiv 1 (d)$ ),  $a_n = 0$  ( $n \not\equiv 1 (d)$ ) definierte unendliche Folge keine einzige modulo  $m$  konstante Differenzenfolge. Sind Hilfssatz 1 und 2 erst einmal abgeleitet (wobei die Anzahlformel von Hilfssatz 1 die Hauptschwierigkeit bildet), so werden die Beweise der Hilfssätze selbst sehr einfach und durchsichtig. An begrifflichen Hilfsmitteln braucht man dann nur noch wohlbekannte Sätze über den Zusammenhang zwischen Polynomen  $n$ -ten Grades und arithmetischen Reihen  $n$ -ter bzw.  $(n-1)$ -ter Ordnung, insbesondere für den ganzzahligen Fall. *Krull (Bonn).*

**Ballieu, Robert et Marie-Jeanne Schuind:** Anneaux finis à module de type  $(p, p^r)$ . Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I, **63**, 137—147 (1949).

Es werden die vom erstgenannten Verf. erhaltenen Ergebnisse über die Klassifikation von Ringen mit vorgegebener additiver Gruppe (dies. Zbl. **31**, 108) verallgemeinert. Für den Fall, daß der Typ der additiven Gruppe von der Gestalt  $(p, p^r)$  ist, wobei  $p$  eine Primzahl und  $r > 1$  ist, wird eine vollständige Aufzählung aller endlicher Ringe dieser Eigenschaft gegeben. *G. Reichel (Tübingen).*

**Amitsur, Shimshon:** Construction d'algèbres centrales simples sur des corps de caractéristique zéro. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1026—1028 (1950).

In einem transzendenten Erweiterungskörper  $K$  eines Körpers  $C$  der Charakteristik 0 sei eine Ableitung definiert, deren Konstantenkörper  $C$  ist. Es sei  $K[t]$  der Ring der Differentialpolynome  $p(t) = \sum_{\nu=0}^n t^\nu k_\nu$  ( $k_\nu \in K$ ) mit  $kt = tk + k'$  für alle  $k \in K$  ( $k'$  Ableitung von  $k$ ). Ferner sei  $p(t)_R$  das Rechtsideal  $p(t)K[t]$ . Die Menge aller Polynome  $a(t) \bmod p(t)_R$  mit  $a(t)p(t) = 0 \bmod p(t)_R$  bildet den invarianten Ring  $E(p)$  von  $p(t)$ . Verf. beweist die Sätze: 1. Jede einfache zentrale Algebra der Ordnung  $n^2$  über  $C$ , für die  $K$  ein Zerfällungskörper ist, ist isomorph mit dem invarianten Ring  $E(p)$  eines Polynoms  $p(t)$  vom Grade  $n$ . 2.  $K$  ist Zerfällungskörper jeder Algebra der Ordnung  $n^2$  über  $C$ , welche dem Ring  $E(p)$  eines  $p(t)$  vom Grade  $n$  isomorph ist. — Gemeinsam mit einem vom Verf. erhaltenen Ergebnis, daß jede einfache zentrale Algebra von endlicher Ordnung über  $C$  einen Zerfällungskörper  $K$ , der transzendente Erweiterung von  $C$  ist, besitzt [C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 902—904 (1950)], erlauben die Resultate die Konstruktion jeder einfachen zentralen Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. *Reichel.*

**Gurevič, G. B.:** Einige arithmetische Invarianten der Lieschen Matrixalgebren und Kriterium für ihre vollständige Reduzibilität. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 403—416 (1949) [Russisch].

Es sei  $\mathfrak{A}$  eine Matrizenalgebra und  $A, B$  zwei ihrer Elemente, es bedeute  $[A B] = A B - B A$ . Zu  $\mathfrak{A}$  läßt sich der Normalisator  $\mathfrak{S}_0$  von  $\mathfrak{A}$  bilden, er besteht aus allen Elementen  $S$  mit  $[S A] \in \mathfrak{A}$ . Unter dem  $R$ -System  $\mathfrak{R}_0$  von  $\mathfrak{S}_0$  möge das System aller Matrizen  $R$  mit  $\sigma(SR) = 0$  (Spur von  $SR$ ) verstanden werden. Weiter werde rekursiv definiert:  $\mathfrak{S}_i$  ist der Normalisator von  $\mathfrak{R}_{i-1}$  und  $\mathfrak{R}_i$  das  $R$ -System von  $\mathfrak{S}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Auf diese Weise entstehen zwei Ketten von Algebren

$$\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2 \subset \dots, \mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \dots.$$

Ist  $\mathfrak{A}$  bereits eine Liesche Algebra, dann ist  $\mathfrak{A}$  in allen  $\mathfrak{S}_k$  enthalten. Ist  $\mathfrak{A}$  eine „Null-Algebra“, d. h. eine Liesche Algebra, deren sämtliche Darstellungsmatrizen nur Eigenwerte Null haben, dann ist  $\mathfrak{A}$  auch in allen  $\mathfrak{R}_k$  enthalten. Von einem gewissen  $k$  ab sind alle  $\mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}_{k+1} = \dots$ ,  $\mathfrak{R}_k$  ist dann eine „vollständige Nullalgebra“, zu der ein gewisses System von Invarianten gehört. — Verf. zeigt, daß man auf diese Weise jedem beliebigen System von Matrizen eine Nullalgebra zuordnen kann und daß ferner jede Liesche Algebra aus beliebigen Elementen in einer solchen Algebra dargestellt werden kann. — Es wird noch der Satz angeschlossen, daß eine Liesche Matrizenalgebra dann und nur dann vollständig reduzibel ist, wenn ihr  $R$ -System aus der Nullmatrix allein besteht.

Wever (Mainz).

Lesieur, Léonce: Un théorème de transfert d'un anneau abstrait à l'anneau des polynomes. Canadian J. Math. 2, 50—65 (1950).

In einem beliebigen kommutativen Ring  $\mathfrak{R}$  mit Einheitselement beweist man mit Wohlordnungsschlüssen bzw. mit Hilfe des Zornschen Lemmas leicht für jedes Ideal  $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{R}$  die Existenz mindestens einer isolierten Primärkomponente  $\mathfrak{q}$ , die ihrerseits zu einem minimalen Primoberideal  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{R}$  von  $\mathfrak{a}$  gehört. Verf. zeigt, daß dieser Satz, falls man seine Gültigkeit für einen gegebenen Ring  $\mathfrak{R}_0$  voraussetzt, elementar auf jeden endlichen Polynomring  $\mathfrak{R}_0[x_1, \dots, x_n]$  ausgedehnt werden kann. Anschließend an dieses Resultat liefert er für Polynomringe  $\mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n]$  mit Körperkoeffizienten einfache Beweise des Hilbertschen Nullstellensatzes und des Laskerschen Satzes von der Zerlegbarkeit jedes Polynomideals in endlich viele Primärkomponenten. Dabei ist im Falle des Laskerschen Theorems das wesentliche wieder die Vermeidung aller tieferen mengentheoretischen Hilfsmittel einschließlich eines Rückgriffs auf eine schwache Form des Auswahlaxioms.

Krull (Bonn).

Gröbner, W.: Über die Eliminationstheorie. Mh. Math., Wien 54, 71—78 (1950).

Im ersten Teil der Note stellt Verf. die Kroneckersche Eliminationstheorie der Elimination mit Hilfe von Eliminationsidealen gegenüber und zeigt an verschiedenen Beispielen die Vorzüge des auf die Idealtheorie gestützten Verfahrens. Im zweiten Teil wird eine Methode zur Berechnung der Längen der Primärkomponenten eines nulldimensionalen Polynomideals skizziert.

Krull (Bonn).

Kaplansky, Irving: Locally compact rings. Amer. J. Math. 70, 447—459 (1948).

L'A. expose la théorie des anneaux localement compacts à l'aide des notions d'ensembles bornés et d'éléments quasi-réguliers (la terminologie utilisée est celle de I. Kaplansky, ce Zbl. 34, 166). Dans tout ce qui suit,  $A$  désigne un anneau localement compact. Tout sous-groupe additif borné (à droite) de  $A$  est contenu dans l'annulateur (à droite) de la composante connexe de 0 dans  $A$  [résultat qui généralise un résultat du ref., cf. J. Braconnier, C. r. Acad. Sci., Paris 222, 527—529 (1946)]; en particulier, si  $A$  n'a pas d'idéaux nilpotents (algébriquement),  $A$  est produit d'un anneau totalement discontinu et d'une algèbre de rang fini sur  $R$ . Si  $A$  est borné et semi-simple,  $A$  est produit de deux anneaux semi-simples, l'un discret et l'autre compact (ces derniers ont été étudiés par l'A. op. cit.). Si  $A$  est borné, commutatif et totalement discontinu,  $A$  est produit d'un anneau compact à unité et d'un anneau à radical ouvert. L'A. caractérise quelques types de  $Q$ -anneaux à



quasi-inverse continu en généralisant des résultats de Y. Otobe [Japan. J. Math., **19**, 189—202 (1945)]: pour que  $A$  soit un  $Q$ -anneau à quasi inverse continu, il faut et il suffit que  $A$  soit un  $Q_r$ -anneau; si  $A$  est connexe, ou bien sans diviseurs de 0, ou bien satisfait à la condition maximale ou minimale pour les idéaux à droite fermés (cette dernière condition entraîne la condition minimale pour tous les idéaux à droite, dans le cas d'un  $Q$ -anneau semi-simple),  $A$  est un  $Q$ -anneau à quasi-inverse continu. L'A. étudie ensuite les idéaux maximaux de  $A$ : si  $A$  n'est pas radical,  $A$  possède un idéal à droite régulier et fermé maximal; si  $A$  est totalement discontinu et possède une unité engendrant un sous-anneau relativement compact, l'intersection des idéaux à droite réguliers et fermés maximaux est l'adhérence du radical de  $A$ . Enfin l'A. caractérise certains anneaux assez proches des corps, en généralisant un résultat de N. Jacobson [Amer. J. Math. **58**, 433—449 (1936); ce Zbl. **14**, 81]: si  $A$  est non discret, simple, de caractéristique 0 et possède une unité, ou bien si  $A$  est non discret, primitif, de caractéristique 0 et possède des idéaux minimaux,  $A$  est une algèbre de rang fini sur son centre. Ce travail est complété par une bibliographie.

Jean Braconnier (Lyon).

Zelinsky, Daniel: Topological characterisation of fields with valuation. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 1145—1150 (1948).

L'a. appelle semi-valuation (resp. valuation) sur un corps  $K$  une application  $v$  de  $K$  dans un groupe (multiplicatif)  $\Gamma$ , ordonné filtrant à droite (resp. totalement ordonné), auquel on a adjoint un plus petit élément 0 (la loi de composition de  $\Gamma$  se prolongeant en posant  $\gamma 0 = 0 \gamma = 0$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ) telle que  $v(xy) = v(x)v(y)$ ,  $v(x+y) \leq \max(v(x), v(y))$ ,  $v(x) = 0$  soit équivalent à  $x = 0$ , quels que soient  $x \in K$  et  $y \in K$ . A toute semi-valuation  $v$  sur  $K$  correspond une topologie compatible avec la structure d'anneau de  $K$ , dans laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les ensembles  $U_\gamma$ ,  $U_\gamma$  étant formé par les  $x \in K$  tels que  $v(x) < \gamma$  ( $\gamma \in \Gamma$ ); on dit que cette topologie est définie par la semi-valuation  $v$ . L'a. généralise un théorème démontré par Shafarevitch et Kaplansky (cf. I. Kaplansky, ce Zbl. **30**, 10) dans le cas où  $\Gamma = R_+^*$ : soit  $K$  un corps topologique; pour que sa topologie soit définie par une semi-valuation, il faut et il suffit que a)  $K$  possède un sous-groupe additif ouvert et borné; pour que la topologie de  $K$  soit définie par une valuation, il faut et il suffit que  $K$  satisfasse aux conditions a) et b) si  $A \subset K$  est disjoint d'un voisinage de 0.  $A^{-1}$  est borné.

Jean Braconnier (Lyon).

## Zahlentheorie:

Becker, H. W. and John Riordan: The arithmetic of Bell and Stirling numbers. Amer. J. Math. **70**, 385—394 (1948).

Symbolic methods are used to obtain many of the properties of Bell and Stirling numbers [cf. E. T. Bell, Amer. J. Math. **61**, 89—101 (1939); this Zbl. **20**, 104] modulo  $p$ , a prime.

Cassels (Cambridge).

Erdős, P.: On a problem in elementary number theory. Math. Student, Madras **17**, 32—33 (1950).

Verf. beweist, daß die Summe  $\sum \mu(d)$  (erstreckt über sämtliche Teiler  $d$  von  $n$  mit  $a \leq d \leq b$ ;  $\mu$  ist die Moebiussehe Funktion) nicht größer ist als der Binomialkoeffizient  $\binom{v}{w}$ , wo  $v = v(n)$  die Anzahl der verschiedenen Primteiler von  $n$  und  $w$  die größte in  $\frac{1}{2}v(n)$  enthaltene ganze Zahl ist. Zu einem gegebenen Wert  $k$  von  $v(n)$  gibt es  $n, a, b$ , derart, daß  $\sum \mu(d) < \binom{v}{w}$ , so daß die Ungleichung nicht verschärft werden kann.

H. D. Kloosterman (Leiden).

Podsypanin, V. D.: Über die diophantische Gleichung  $x^3 = y^2 + Az^6$ . Mat. Sbornik, n. S. **24** (66), 391—403 (1949) [Russisch].

Die ganzen Lösungen der Gleichung (1)  $x^3 = y^2 + Az^6$  ( $A$  ganz) und die rationalen Lösungen von (2)  $\eta^2 = \xi^3 - A$  sind durch die Transformation  $\eta = y/z^3$ ,  $\xi = x/z^2$  verknüpft.  $t$  ist das elliptische Argument von  $(\xi, \eta)$ , wenn  $\xi = \wp(t)$  und  $\eta = \frac{1}{2}\wp'(t)$  ( $\wp$  Weierstraßsche Funktion) gilt. Nach L. J. Mordell [Proc. Cambridge philos. Soc. **21**, 179—192 (1922)] gibt es endlich viele Argumente  $t_i = t_i(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  so, daß das Argument einer willkürlichen Lösung  $(\xi, \eta)$  ein lineares Kompositum von  $t_1, \dots, t_r$  ist.  $r = r(A)$  heißt der Rang von (1) oder (2). — Verf. beweist eine obere Abschätzung für  $r$ : Sei  $A = f^2g$ , wo  $g$  quadratfrei ist. Sei weiter  $n_1$  die Anzahl der Primfaktoren von  $f$  und  $n_2$  die Zahl solcher Ideale  $J$  in  $R(\sqrt{-g})$ , für die  $J^3$  Hauptideal ist. Dann gilt  $r \leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ , wo  $n_3 = 1$  für  $g \equiv 7 \pmod{8}$  und  $n_4 = 1$  für  $g < 0$ ,  $g = 3$ ; sonst  $n_3 = n_4 = 0$ . Es wird noch eine Tabelle der Grundlösungen und Ränge für  $|A| \leq 90$  gegeben. Gál.

Nagell, Trygve: Über die Anzahl der Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades. Math. Z., Berlin **52**, 750—757 (1950).

The representations of an integer  $N \neq 0$  by a form  $F(x, y)$  with integer coefficients can, as is known, be deduced from the representations of 1 by a certain finite number of forms depending only on  $F(x, y)$  and  $N$  [cf. T. Nagell, L'analyse indéterminée de degré supérieur, Mém. Sci. math. **39** (Paris, 1929)]. The author considers here the special case when  $F(x, y)$  is an irreducible binary cubic of negative discriminant and  $N = 2, 4$ . He deduces bounds for the number of solutions from the known bounds for  $N = 1$  [cf. T. Nagell, Math. Z., Berlin **28**, 10—29 (1928), B. Delaunay, J. Soc. phys.-math. Leningrad **1**, 257—267 (1927)]. Cassels.

Trypanis, A. A.: An extension of Fermat's theorem. Amer. math. Monthly **57**, 87—89 (1950).

Es sei  $a$  ganzzahlig,  $p$  eine ungerade Primzahl,  $(a, p) = 1$ . Aus dem kleinen Fermatschen Satz folgt bekanntlich leicht  $a^{p^{n-1}(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$  für alle ganzzahligen positiven  $n$ . Verf. zeigt, daß im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen diese Kongruenz auch für beliebige ganzzahlige  $n$  gilt. — Zum Beweis werden die Wurzeln  $\Theta_j = Z^{p^{n-1}} \Theta$ ,  $j = 1, 2, \dots, p^n$ , des irreduziblen Polynoms  $x^{p^n} - a$  betrachtet ( $Z$  ist primitive  $p^{n+1}$ -te Einheitswurzel,  $\Theta = \Theta_1$  eine spezielle Lösung). Man sieht ganz leicht:  $\Theta^{p^{n-1}(p-1)} - 1 = a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Ist  $B_j$  aus  $(\Theta_j^{p-1} - 1)^{p^n} = B_j(1 - Z)^{p^{n-1}}$  bestimmt, so folgt, wenn  $H_j$  eine geeignete Lösung von  $x^{p^n} = B_j$  ist, sofort

$$a^{p-1} - 1 = \prod_{j=1}^{p^n} (\Theta_j^{p-1} - 1) = \left( \prod_{j=1}^{p^n} H_j \right) (1 - Z)^{p^{n-1}} = \left( \prod H_j \right) \frac{1}{E} p,$$

letzteres vermittelt der aus der Theorie der Kreisteilungskörper geläufigen Zerlegung  $p = E(1 - Z)^{p^{n-1}}$ , worin  $E$  eine Einheit ist. Eine einfache Überlegung liefert  $a^{(p-1)/p^n} - 1 \equiv 0 \pmod{(1 - Z)^{p-1}}$  und somit auch  $a^{(p-1)/p^n} - 1 \equiv 0 \pmod{p^{p^n}}$ .

Ostmann (Berlin).

Whiteman, Albert Leon: Theorems analogous to Jacobsthal's theorem. Duke math. J. **16**, 619—626 (1949).

Ist  $p$  eine Primzahl der Form  $4f + 1$ , so lassen sich nach E. Jacobsthal [Über die Darstellung der Primzahlen ..., J. reine angew. Math. **132**, 238—245 (1907)] die Lösungen  $a, b$  von  $p = 4f + 1 = a^2 + b^2$  mittels der Jacobsthal-Funktion  $\Phi_q(s) = \sum_{m=0}^{p-1} \left( \frac{m}{p} \right) \left( \frac{m^q + s}{p} \right)$  angeben ( $\left( \frac{m}{p} \right)$  bedeutet das Legendre-Symbol). L. v. Schrutka [Ein Beweis für die Zerlegbarkeit ..., J. reine angew. Math. **140**, 252—265 (1911)] und Chowla [A formula similar to Jacobsthal's ..., Proc. Lahore phil. Soc. **7**, 2 (1945)] gaben die Erweiterung auf die Lösungen von

$$a^2 + 3b^2 = p = 3f + 1.$$



Die Methode des Verf. erlaubt, neben der Herleitung dieser Resultate darüber hinaus die Lösungen in den Fällen  $a^2 + 50b^2 + 50c^2 + 125d^2 = 16p$ ,  $p = 5f + 1$  und  $a^2 + 2b^2 = p = 8f + 1$  durch die Jacobsthal-Funktion anzugeben. Zum Beweis wird die Anzahlfunktion  $(h, k)$  (cyclotomic numbers) der Lösungen  $t, z$  der Kongruenz  $g^{ez+h} \equiv 1 + g^{et+k} (p)$  mit der Nebenbedingung  $0 \leq t, z \leq f-1$  betrachtet; hierin ist  $g$  eine primitive Wurzel mod  $p$ ,  $h$  und  $k$  seien ganze Zahlen so, daß  $0 \leq h, k \leq e-1$  gilt, schließlich sei  $p = ef + 1$ . Ostmann (Berlin).

**Ostmann, Hans-Heinrich:** Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe. J. reine angew. Math., Berlin 187, 183—188 (1950).

In Fortführung und Verallgemeinerung früherer Ergebnisse (dies. Zbl. 26, 202) beweist Verf. für die asymptotische Dichte der Summe zweier Mengen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  von ganzen Zahlen  $\geq 0$  mit den Anzahlfunktionen  $A(x)$  und  $B(x)$  die Abschätzung

$$\delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geq \lim_{x=1,2,3,\dots} \frac{A(x) + B(x) - G(x)}{x},$$

wo  $G(x)$  die Anzahlfunktion einer in bestimmter Weise zu erhaltenden Menge  $\mathfrak{G}$  bedeutet. Hieraus folgt insbesondere: Enthält  $\mathfrak{B}$  mindestens  $k > 0$  aufeinander folgende natürliche Zahlen als Elemente, so ist — da dann stets  $B(x) \geq kG(x)$  ist —

$\delta^*(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \geq \delta^*(\mathfrak{A}) + \frac{k-1}{k} \delta^*(\mathfrak{B})$ , in Verallgemeinerung und Verschärfung eines Resultats von Erdős [ $k = 2$ ; Ann. Math., Princeton, II. S. 43, 65—68 (1942)].

Rohrbach (Mainz).

**Corput, J. G. van der and J. H. B. Kemperman:** The second pearl of the theory of numbers. I. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 696—704; Indag. math., Amsterdam 11, 226—234 (1949).

Die „zweite Perle“ ist nach einer Bezeichnung von A. Khintchine [Drei Perlen der Zahlentheorie (Russisch), Moskau 1947] die als Satz von Mann bekannte Verschärfung der  $(\alpha + \beta)$ -Hypothese der additiven Zahlentheorie. Verf. setzen die Untersuchungen van der Corputs zur Verallgemeinerung dieses Satzes (dies. Zbl. 30, 16'17) fort. Ist  $A$  eine Menge reeller Zahlen,  $\psi(a)$  eine für jedes  $a \in A$  definierte reelle Funktion, so wird mit  $\psi(A)$  die Menge der Zahlen bezeichnet, die sich (auf mindestens eine Weise) in der Form  $\psi(a)$  mit  $a \in A$  darstellen lassen, z. B.  $2A$ ,  $A^2$ ,  $\log A$  (falls alle  $a > 0$ ). Hiervon ist zu unterscheiden z. B. die Menge  $A + A$  bzw.  $A \cdot A$ , die aus allen Elementen der Form  $a + a'$  bzw.  $a \cdot a'$  besteht mit  $a, a' \in A$ . Ferner wird, abweichend vom Bisherigen, unter  $A(h)$  die Anzahl aller  $a < h$  von  $A$  verstanden (bedeutet, daß 0 statt  $h$  mitgezählt wird). Das Hauptresultat ist: In einer geordneten Menge  $G$  mit erstem Element, genannt 0, sei eine kommutative und assoziative Verknüpfung, genannt Addition, definiert mit  $g + 0 = g$ ,  $g + g^* > g$  für  $g^* > 0$  und der Eigenschaft:  $g + g' = g + g''$  zieht  $g' = g''$  nach sich.  $\varphi(g)$  sei eine langsam anwachsende Funktion der Elemente  $> 0$  von  $G$ , d. h.  $\varphi(h) \leq \varphi(h') + \varphi(h'')$  für irgend drei  $h, h', h'' \in H$  mit  $h \leq h' + h''$ , und  $H$  Teilmenge von  $G$ . Erfüllen dann die endlichen, 0 enthaltenden Teilmengen  $A, B$  von  $H$  für jedes  $h > 0$  von  $H$  die Bedingungen  $A(h) + B(h) \geq 1 + \varphi(h)$ , so ist  $(A + B)(h) \geq \varphi(h)$  für diese  $h$ . Die früheren Untersuchungen van der Corputs bezogen sich auf den Fall, daß  $H$  die Menge der ganzen Zahlen  $\geq 0$  ist. Das dort benutzte (im Kern auf Artin-Scherk zurückgehende) Transformationsprinzip bildet auch jetzt die Grundlage des Beweises. — Drei Spezialisierungen des Satzes werden noch besonders formuliert: Der  $(A + B)$ -Satz, der sich ergibt, falls  $G$  eine Menge nichtnegativer Zahlen ist, die mit je zwei Elementen stets auch deren Summe enthält. Der  $(A \cdot B)$ -Satz (falls  $G$  eine Menge von Zahlen  $\geq 1$  ist, die mit je zweien auch deren Produkt enthält): Aus  $A(h) + B(h) \geq 1 + \varphi(h)$  für jedes  $h > 1$  folgt  $AB(h) \geq \varphi(h)$ . Hier muß  $\varphi(h) \leq \varphi(h') + \varphi(h'')$  sein für je drei  $h, h', h'' \in H \subset G$  mit  $h \leq h' h''$ . Der Beweis

folgt aus dem  $(A + B)$ -Satz durch Übergang zu Logarithmen: Man ersetzt  $G, H, A, B, g, h, 1$  durch  $\log G, \log H, \dots, 0$ . Schließlich der  $(A^k + B^k)$ -Satz: Aus  $A(h) + B(h) \geq 1 + \varphi(h^k)$  für jedes positive  $h \leq g$  folgt  $(A^k + B^k)(h) \geq \varphi(h)$  für jedes positive  $h \leq g^k$  ( $k > 0$ ). Auch dies ergibt sich aus dem  $(A + B)$ -Satz.

*Rohrbach (Mainz).*

**Corput, J. G. van der and J. H. B. Kemperman: The second pearl of the theory of numbers. II.** Proc. Akad. Wet., Amsterdam **52**, 801—809 (1949); Indag. math., Amsterdam **11**, 277—285 (1949).

**Corput, J. G. van der and J. H. B. Kemperman: The second pearl of the theory of numbers. III.** Proc. Akad. Wet., Amsterdam **52**, 927—937 (1949); Indag. math., Amsterdam **11**, 325—335 (1949).

Weitere Anwendungen des Hauptresultats von Teil I (s. das vorangeh. Referat) werden gegeben für die Fälle, daß die Summe zweier Zahlen  $a, b \in G$  durch  $a + b + \lambda ab$  mit festem  $\lambda > 0$  definiert wird und daß die Elemente von  $G$  komplexe Zahlen sind. In diesem Falle werden durch die Anzahlfunktion die Elemente mit einem Realteil  $< h$  gezählt. Ferner wird die für  $G$  definierte Verknüpfung noch weiter abgeschwächt; es braucht nur eine sogenannte teilweise Addition vorzuliegen, bei der kommutatives und assoziatives Gesetz durch schwächere Forderungen ersetzt werden. Sodann wird diese Verallgemeinerung (und damit alles Frühere) auch noch für Gewichte formuliert (vgl. dies. Zbl. **30**, 16/17), d. h. jedem  $g \in G$  ein Gewicht  $f(g) \geq 0$  zugeordnet und die Anzahlfunktion  $S(h)$  einer Menge  $S$  durch  $S(h) = \sum_{s < h, s \in S} f(s)$  ersetzt. Die Untersuchung geht schließlich so weit, in der gegebenen geordneten Menge  $G$  mit teilweiser Addition und zwei gegebenen nicht-leeren endlichen Teilmengen  $A, B$  nicht nur ein Paar, sondern beliebig viele Paare von Funktionen  $\varphi(g), f(g)$  zuzulassen, und gipfelt in dem Satz, daß für jedes solche Paar aus  $A(h) + B(h) \geq \varphi(h)$  unter bestimmten Bedingungen für  $\varphi(g)$  und  $f(g)$  wieder  $(A + B)(h) \geq \varphi(h)$  folgt, wobei die Anzahlfunktionen in dem eben genannten Sinne zu verstehen sind. — Teil III ist dem Beweise dieses Satzes gewidmet, dessen Grundidee immer noch das einfache Transformationsprinzip der vorangehenden Untersuchungen ist.

*Rohrbach (Mainz).*

**Blaney, Hugh: Some asymmetric inequalities.** Proc. Cambridge phil. Soc. **46**, 359—376 (1950).

The author determines functions  $g(\mu)$  ( $-1 < \mu \leq 1$ ) with the following property: Let  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \vartheta, \varphi$  be real numbers and  $\Delta = |\alpha\delta - \beta\gamma| > 0$ . Then there are always integers  $x, y$  such that

$$-\mu g(\mu) \Delta < (\alpha x + \beta y + \vartheta)(\gamma x + \delta y + \varphi) \leq g(\mu) \Delta.$$

A well-known theorem of Minkowski states that  $g(1) = \frac{1}{4}$  is a best possible result. The author proves the following theorems: (1) For  $0 \leq \mu \leq 1$  we may put  $g(\mu) = \frac{1}{4} \mu^{-1/2}$ . This value of  $g(\mu)$  is best possible for an infinity of  $\mu$  clustering about  $\mu = 1$ . — (2) For  $0 \leq \mu \leq 1$  we may put  $g(\mu) = \{(1 + \mu)(1 + 9\mu)\}^{-1/2}$ . This value is best possible for an infinity of  $\mu$  clustering about  $\mu = 0$ . — (3) For  $-1 < \mu \leq 0$  we may put  $g(\mu) = (1 - \nu)^{-3/2} (1 + 3\nu)^{-1/2}$  where  $\nu^2 = -\mu$ . This value is best possible for  $\nu = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  and no other  $\nu$ . — All the cases for which the given  $g(\mu)$  are best possible are given explicitly. An improvement of (2) is given for the range  $\frac{1}{7} \leq \mu \leq \frac{1}{3}$ .

*Cassels (Cambridge).*

**Davenport, H. and C. A. Rogers: Diophantine inequalities with an infinity of solutions.** Phil. Trans. R. Soc., London, A **242**, 311—344 (1950).

In the notation and language of Mahler [Proc. R. Soc., London, A **187**, 151—187 (1946); Proc. Akad. Wet., Amsterdam **49**, 331—343, 444—454, 524—532, 622—631 (1946)] let  $K$  be a (closed) star domain and  $\Delta(K)$  its critical determinant. The following theorem is proved: — Suppose  $K$  is fully automorphic and that  $\Delta$  is a lattice of determinant  $\Delta$ . Then (a) if  $\Delta < \Delta(K)$  there are infinitely many points



of  $\Lambda$  in the interior of  $K$ , (b) if  $\Lambda = \Lambda(K)$  and  $K$  is boundedly reducible there are infinitely many points of  $\Lambda$  in  $K$ , (c) if  $\Lambda = \Lambda(K)$  and  $K$  is fully reducible there are infinitely many points of  $\Lambda$  in the interior of  $K$  except when  $\Lambda$  is a critical lattice. — Here being fully automorphic or fully reducible are rather stronger properties than being automorphic or boundedly reducible respectively [cf. Mahler, loc. cit. for the last two concepts]. — In particular if  $x_1, \dots, x_n$  are real linear forms in the variables  $u_1, \dots, u_n$  of determinant  $D \neq 0$ , there are infinitely many integer solutions  $u_1, \dots, u_n$  of the following inequalities:

$$(1) \quad |x_1 x_2| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} |D| \quad (n = 2)$$

$$(2) \quad -(k^2 + 4k)^{-\frac{1}{2}} \leq x_1 x_2 \leq k(k^2 + 4k)^{-\frac{1}{2}} \quad (n = 2, k > 0, \text{ an integer})$$

$$(3) \quad |x_1 x_2 x_3| \leq \frac{1}{7} |D| \quad (n = 3) \quad (4) \quad |(x_1^2 + x_2^2) x_3| \leq \frac{2}{\sqrt{23}} |D| \quad (n = 3)$$

$$(5) \quad |x_1^2 + x_2^2 - x_3^2| \leq \left(\frac{2}{9}\right) D^2)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 3)$$

$$(6) \quad |x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2| \leq \left(\frac{4}{7}\right) D^2)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 4)$$

$$(7) \quad |x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2| \leq \left(\frac{4}{9}\right) D^2)^{\frac{1}{2}} \quad (n = 4).$$

Here  $<$  can be read for  $\leq$  except when the left hand side is equivalent to a critical form (when there are no nontrivial solutions with  $<$ ). Further generalisations are given of which the following is a typical application: Let  $\lambda, \mu > 0$  and  $\lambda\mu > 5^{-\frac{1}{2}}$ . Then the inequalities  $|x_1 x_2| < \lambda$ ,  $|x_3| < \mu$  have infinitely many integer solutions  $u_1, u_2, u_3$  except possibly when there are non-trivial solutions both of  $x_2 = 0$ ,  $|x_3| \leq 1$  and of  $x_1 = 0$ ,  $|x_3| \leq 1$ . — It is known that except in the critical case there is always at least one nontrivial solution of the inequalities obtained from (1) — (3), (5) — (7) by replacing the constants on the right hand sides by appropriate smaller ones, i. e. the critical cases are „isolated“. This is not true for (4), but it is shown that the constant in (4) may be replaced by a smaller one except when both  $x_3$  and  $x_1^2 + x_2^2$  are equivalent to certain forms (but not necessarily by the same transformation). — By a special investigation it is shown that analogous „isolation“ results hold for (1), (3), (4) when not only one, but an infinity of solutions is required. The case when one or more of  $|x_1|$ ,  $|x_2|$ ,  $|x_3|$  is required to be less than an arbitrarily given  $\varepsilon > 0$  is also discussed. In particular there is given a very simple deduction of the „Markoff chain for approximations“ from the „Markoff chain for forms“ [i. e. from the „successive minima“ of (1)]. *Cassels (Cambridge).*

Rogers, C. A.: Existence theorems in the geometry of numbers. *Ann. Math.*, Princeton, II. S. 48, 994—1002 (1947).

Ref. hat folgenden Satz aufgestellt und bewiesen (dies. Zbl. 28, 206): Ist  $\varrho(x)$  eine beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion im  $R_n$ , welche außerhalb eines beschränkten Bereiches verschwindet, so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Gitter  $G$  mit Det. 1, so daß

$$(1) \quad \sum' \varrho(g) \leq \int_{R_n} \varrho(x) dx + \varepsilon$$

ist. (Die Summe links erstreckt sich über alle Gitterpunkte  $g \neq 0$  von  $G$ .) C. Siegel [*Ann. Math.*, Princeton, II. S. 46, 340—347 (1945)] gab für diesen Satz einen weiteren, sehr gedankentiefen Beweis, der zugleich zeigte, daß in (1) das  $\varepsilon$  eingespart werden kann. Weiter zeigte er, daß es ein Gitter  $G$  mit Det. 1 gibt, so daß

$$(2) \quad \sum^* \varrho(g) \leq \frac{1}{z(n)} \int_{R_n} \varrho(x) dx$$

ist, wo sich jetzt die Summe links über alle primitiven Gitterpunkte  $g$ , d. h. solche Gitterpunkte, bei denen der g. g. T. ihrer Koordinaten 1 ist, erstreckt. — Der Verf. gibt nun für (1) und (2) (allerdings mit einem  $\varepsilon$ -Term) neue, überraschend einfache Beweise. Aus (1) oder (2) folgt ein Satz, welchen Minkowski vermutet

hat (vgl. wieder die oben zitierte Arbeit des Ref.). Für die Kugel gibt nun der Verf. eine Verschärfung an, welche nicht angeführt werden soll, da der Verf. und Davenport (dies. Zbl. 30, 346) weitere Verschärfungen erreicht haben. *Hlawka* (Wien).

**Cassels, J. W. S.:** Some metrical theorems of diophantine approximation. IV. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 53, 176—187 (1950); Indag. math., Amsterdam 12, 14—25 (1950).

Es mögen wieder die gleichen Bezeichnungen wie früher gelten (Cassels I, III, dies. Zbl. 35, 13). Wir setzen noch  $R_N(\theta) = \text{Max}_{\alpha, \beta} |R_N(\alpha, \beta; \theta)| = ND(N)$  [ $D(N)$  = Diskrepanz]. Dann wird der Satz von Erdős-Koksma (dies. Zbl. 35, 321) und Cassels III, für spezielle Folgen verschärft: Es sei  $\varphi(n)$  eine positive Funktion der ganzzahligen Variablen  $n$  und es gelte:

1.  $f'_n(\theta) \geq e^{\varphi(n)} f'_{n-1}(\theta)$ ,  $f'_1(\theta) \geq 1$  für alle  $\theta$  und  $n > 1$ , 2.  $\log n \log \log n \geq \varphi(n) \geq c > 0$  für genügend große  $n$  ( $c$  unabhängig von  $n$ ). 3.  $\varphi(n)$  und  $\log n \log \log n \varphi^{-1}(n)$  monoton nicht abnehmend für genügend große  $n$ . — Dann gibt es für fast alle  $\theta$  ein  $N_0 = N_0(\theta)$ , so daß

$$(1) \quad R_N(\theta) \leq A_0 N^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} N \log \log N \varphi^{-\frac{1}{2}}(N)$$

für  $N > N_0$ , wo  $A_0$  eine absolute Konstante ist. Für  $\varphi(n) = \log n \log \log n$  zeigt das Gesetz der iterierten Logarithmen, daß sich (1) in  $N$  nicht verschärfen läßt. Der Spezialfall  $\varphi(n) = c = \text{konst.}$  ist der lakunäre Fall, welchen schon früher Erdős und Koksma (dies. Zbl. 33, 165) behandelt hatten, die aber ein schwächeres Resultat als (1) erzielten. *Hlawka* (Wien).

**Hlawka, Edmund:** Inhomogene Linearformen in algebraischen Zahlkörpern. S. B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Kl. IIa 155, 63—73 (1947).

Let  $K$  be an algebraic field of degree  $g$  over the rational field  $R$  with basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  and let  $K^*$  be the ring of all expressions  $a_1 \omega_1 + \dots + a_g \omega_g$  ( $a_1, \dots, a_g$  real). Suppose that  $L_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = L_i(\xi)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are linear forms with real coefficients and unit determinant in the  $n$  variables  $\xi_1, \dots, \xi_n = (\xi)$  and that  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K^*$  are arbitrary. Then there exist integers  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  of  $K$  such that

$$\prod_i |\text{Norm} \{L_i(\gamma) - \lambda_i\}| \leq C_g^n$$

where  $C_g$  is a constant depending only on  $K$ . — An elaborate formula for a  $C_g$  with this property is given. — In the case  $g = 1$ ,  $K = R$  a well-known unproved conjecture of Minkowski is that  $C_1 = \frac{1}{2}$ . The author's proof of the existence of  $C_g$  follows a proof of Siegel of the existence of  $C_1$  [cf. Davenport „Note on a result of Siegel“, Acta arithmet. 2, 262—265 (1937); Mahler „An analogue of Minkowski's geometry of numbers“, Ann. Math., Princeton, II. S. 42, 488—522 (1941); this Zbl. 27, 160]. *Cassels* (Cambridge).

**Hlawka, Edmund:** Über einen Satz aus der Geometrie der Zahlen. S. B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa 155, 75—82 (1947).

The author gives an elementary arithmetical proof of the following result which he had previously proved analytically [Math. Z., Berlin 49, 285—312 (1943); this Zbl. 28, 206]. — Let  $M_1, M_2$  be two bounded closed Jordan-measurable sets in  $n$ -dimensional euclidean space with respective volumes  $V_1, V_2$ . Let  $k_0, k_1, \dots, k_n$  be integers and define  $M_1(K), M_2(K), M_3(K)$  to be the sets of points

$$\pm K^{-1}(y - x) = \left( \frac{x_1 - y_1}{k_1}, \dots, \frac{x_n - y_n}{k_n} \right)$$

where respectively  $x, y \in M_1$ ;  $x, y \in M_2$ ;  $x \in M_1, y \in M_2$ . A lattice point is defined to be one with integer co-ordinates. We suppose that there are integers  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) such that

$$0 \leq r_i \leq k_0 - \left[ \frac{V_i}{k_1 \dots k_n} \right] - 1,$$



and that there are at most  $k_0 - r_i - 1$  lattice points (not 0) in  $M_i(K)$ . Finally suppose

$$V_1 > 0, \quad V_2 > 0; \quad V_1 + V_2 > k_0 k_1 \cdots k_n.$$

Then the sets  $M_3(K) + g$ , where  $g$  runs through all lattice points, covers all space at least  $r + 1$  times, where

$$r = \left[ \text{Max} \left\{ \frac{k_0}{2}, \frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{2 \sqrt{V_1 V_2}} \right\} \right].$$

A number of special cases are considered.

*Cassels* (Cambridge).

**Hlawka, Edmund:** Über Gitterpunkte in Zylindern. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 156, 203—217 (1948).

The symmetric distance-function  $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$  in the sense of Minkowski is called  $\sigma_p$ -convex if there are two positive numbers  $\sigma, c$  and a positive integer  $p$  with the following property: Out of every  $k$  distinct points  $x_1, \dots, x_k$  ( $k > p$ ) there can always be chosen  $p + 1$  points  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$  so that

$$F^\sigma(\bar{x}_i - \bar{x}_0) \leq \frac{c}{k-p} \sum_{j=1}^k F^\sigma(x_j) \quad (i = 1, \dots, p).$$

The set  $F(x) \leq t$  where  $t > 0$  is called a  $\sigma_p$ -convex set. — A „cylinder“ is the topological product of a  $\sigma_p$ -convex set and a convex set in the ordinary sense, both symmetric about the origin. An estimate is given for the lattice-constant of a „cylinder“. Further an „alternative-theorem“ is proved, i.e. a theorem that either a „cylinder“ contains a certain number of lattice points or the set of all „cylinders“ about all lattice-points covers all space a certain number of times. — In particular for an  $n$ -dimensional cylinder (in the usual sense) on an  $m$ -dimensional ellipsoid ( $m < n$ ) the constant  $2^n$  of Minkowski's convex body theorem may be replaced by  $2^{n-m/2-1} (m+2) (1+r_{m2})^{-1}$  where  $r_{m2} > 0$ . — The methods and results are related to earlier work of the author [Math. Z., Berlin 49, 285—312 (1943); this Zbl. 28, 206].

*Cassels* (Cambridge).

**Prachar, K.:** Über höhere Minima quadratischer Formen. Mh. Math., Wien 53, 268—277 (1949).

Sei  $K$  ein konvexer Körper im  $R_n$ ,  $f$  seine Eichfunktion, und  $m_k$  die folgendermaßen bestimmte Zahl: 1. für höchstens  $k-1$  Gitterpunktpaare ( $\neq 0$ ) gilt  $f < m_k$ ; 2. für mindestens  $k$  Gitterpunktpaare gilt  $f \leq m_k$ . Unter  $M_k$  verstehen wir die obere Grenze der  $m_k$  für eine Klasse von Funktionen  $f$ . Verf. bestimmt  $M_2$  für quadratische Formen und für hermitesche Formen in den speziellen Körpern  $K(i\sqrt{p})$ ,  $p = 1, 2, 3, 7, 11$ , und findet die Werte:

$$M_2 = \sqrt{\frac{64}{15}} \text{ für positive quadratische Formen;}$$

$$\text{in } K(i\sqrt{p}): \frac{p}{M_2} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 7 & 11 \\ \hline \sqrt{\frac{8}{3}} & 2 & \sqrt{\frac{27}{8}} & \sqrt{\frac{4}{5}} & \sqrt{\frac{11}{2}} \end{array} \right|$$

Für positiv definite quadratische Formen (mit der Diskriminante 1) gilt weiter  $M_k = k^2 (k^2 - \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$  für genügend große  $k$ .

*Fáry* (Paris).

**Fejes Tóth, László:** On the densest packing of convex domains. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 51, 544—547 (1948).

Es liege in der Ebene eine gitterförmige Lagerung von Bereichen vor, die durch Parallelverschiebung aus einem konvexen Bereich  $C$  mit Mittelpunkt hervorgehen, und nicht übereinander greifen. Unter der Dichte  $d$  dieser Lagerung versteht man den Quotienten  $|C|/|P|$ , wo  $|C|$  der Flächeninhalt von  $C$  und  $|P|$  der Flächeninhalt des Gitterparallelogramms  $P$  ist. Für das Maximum  $d(C)$  von  $d$  bei festem  $C$  vermutete Courant [Blaschke, Vorl. über Differentialgeometrie II, S. 65, Berlin (1923)], daß  $d(C) \geq \pi/\sqrt{12}$  ist, wo das Gleichheitszeichen für den Kreis angenommen wird. K. Reinhardt (dies. Zbl. 9, 320) und K. Mahler [Proc. Akad. Wet., Amster-

dam 50, 108—118 (1947)] zeigten, daß diese Vermutung nicht richtig ist. K. Mahler zeigte in der Arbeit „The theorem of Minkowski-Hlawka“ [Duke Math. J. 13, 611—621 (1946)] daß  $d(C) > \frac{1}{2}\sqrt{3}$  ist. Der Verf. gibt nun in dieser Arbeit, die ohne Kenntnis der Arbeit von Mahler geschrieben wurde, einen weiteren sehr schönen Beweis der obigen Abschätzung. Der Verf. weist darauf hin, daß für konvexe Bereiche  $C$  ohne Mittelpunkt  $d(C) \geq \frac{2}{3}$  ist und diese Schranke für Dreiecke angenommen wird. Hlawka (Wien).

**Schneider, Theodor:** Verallgemeinerung einer Minkowskischen Ungleichung über konvexe Körper mit Mittelpunkt. Math. Ann., Berlin 122, 35—36 (1950).

A short proof of Minkowski's theorem that  $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n V \leq 2^n$  where  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  are the successive minima of an  $n$ -dimensional symmetric non-concave body  $\mathfrak{K}$  of volume  $V$  with respect to a lattice of unit determinant. The following more general result is proved: Let the origin  $O$  and  $m$  pairs of lattice points  $\pm Q_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) be given. Define  $\mu_k$  to be the least upper bound of the values of  $\mu$  such that all the lattice points in  $\mu \mathfrak{K}$ , except possibly  $O$ ,  $\pm Q_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) lie in some  $(k-1)$ -dimensional subspace through  $O$ . Then  $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n V \leq (m+1) 2^n$  (\*). The proof depends on the weaker inequality  $\mu_1^n V \leq (m+1) 2^n$  [van der Corput, Acta arithmet. 2, 145 (1936); this. Zbl. 15, 294] which is incorrectly quoted as  $\mu_1^n \leq m 2^n$  and so (\*) is given in the text as  $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n V \leq m 2^n$ . — The proof appears to be incomplete as it is not obvious in general that  $\mathfrak{K}^{(j+1)} \subset \mathfrak{K}_{j+1}$  in the language of the paper. Cassels (Cambridge).

**Schüler, Hans:** Vereinfachter Beweis eines Minkowskischen Satzes über konvexe Körper mit Mittelpunkt. Arch. Math., Karlsruhe 2, 202—204 (1950).

Sehr kurzer, geometrisch durchsichtiger Beweis des von Minkowski in seiner Geometrie der Zahlen, Kap. V, § 53, S. 211ff. aufgestellten und bewiesenen und im Referat über Davenports Vereinfachung des Beweises, dies. Zbl. 21, 296, wiedergegebenen Satzes. Lochs (Innsbruck).

**Kuipers, L.:** On real periodic functions and functions with periodic derivatives. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 53, 226—232 (1950); Indag. math., Amsterdam 12, 34—40 (1950).

B. Meulenbeld und der Verf. haben die Begriffe der  $C^I, C^{II}, C^{III}$ -Gleichverteilung mod 1 meßbarer Funktionen  $f(t)$ , definiert für  $t \geq 0$ , eingeführt [Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 1151—1157 (1949)]. Wir geben zunächst die Definition für  $C^I, C^{II}$ -Gleichverteilung: 1. Es seien  $\alpha, \beta$  reelle Zahlen ( $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ ) und  $\theta(\alpha, \beta; f(t)) = 1$ , wenn  $\alpha \leq f(t) < \beta \pmod{1}$ , und sonst 0.

Ist dann für jedes Paar  $\alpha, \beta$   $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \theta(\alpha, \beta; f(t)) dt = \beta - \alpha$ , dann heißt  $f(t)$

$C^I$ -gleichverteilt mod. 1. Notwendig und hinreichend für diese Gleichverteilung ist, daß für jede ganze Zahl  $h \neq 0$

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i h f(t)} dt = 0$$

ist. 2. Ist  $V_k$  ein Intervall von  $J$  ( $0 \leq u \leq 1$ ), dann sei  $S_T(V_k)$  die Menge der Punkte  $t$  in  $0 \leq t \leq T$ , für die  $f(t) - [f(t)]$  in  $V_k$  liegt. Gilt dann für jede Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k \text{ nicht übergreifender Intervalle } V_k \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} S_T(V_k) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right\|$$

( $\|E\|$  = Maß der Punktmenge  $E$ ), dann heißt  $f(t)$   $C^{II}$ -gleichverteilt mod. 1. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß (1) gilt und für jedes System von Intervallen

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k \text{ auf } J$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \|S_T(V_k)\| = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \|S_T(V_k)\|$$



erfüllt ist. Die Arbeit beschäftigt sich nun mit Funktionen, für welche  $f'(t)$  bzw.  $f''(t)$  vorhanden und periodisch ist. Es gilt z. B. (Satz 2): Ist  $f'(t)$  periodisch mit der Periode  $p$  und ist die Zahl  $\tau = f(t+p) - f(t)$  irrational, dann ist  $f(t)$   $C^I$ -gleichverteilt. Ist  $\tau$  rational, dann gilt die Beh. dann und nur dann, wenn

$\int_0^p e^{2\pi i h f(t)} dt = 0$  ist für jede ganze Zahl  $h$ , für welche  $h\tau$  ganz ist. Daraus kann gefolgert werden, daß  $f(t) = \alpha t + \beta \sin t$  dann und nur dann  $C^I$ -gleichverteilt ist, wenn  $\pi\alpha$  irrational ist. Ist  $|\beta| < \alpha$  und ist  $\pi\alpha$  irrational, dann ist  $f(t)$  auch  $C^{II}$ -gleichverteilt. — Weiter wird gezeigt (Satz 4): Ist  $f''(t)$  vorhanden und periodisch,  $f'(t)$  nicht periodisch, dann ist wieder  $f(t)$   $C^I$ -gleichverteilt. Ein Beispiel dafür ist  $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \sin t$  ( $\alpha \neq 0$ ).  
Hlawka (Wien).

Koksma, J. F. and R. Salem: Uniform distribution and Lebesgue integration. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 87—96 (1950).

Vgl. die Besprechung der Arbeit gleichen Titels in dies. Zbl. 33, 251.

## Analysis.

### Differentiation und Integration reeller Funktionen:

•Luzin (Lusin), N. N.: Integralrechnung. 2. Aufl. Moskau: Staatsverlag „Sowjetische Wissenschaft“ 1949. 419 S. R. 12,— [Russisch].

Ein elementares Lehrbuch, das neben den einfachen und mehrfachen Integralen auch komplexe Zahlen und Funktionen, Differentialgleichungen (einschließlich der Methode von Tschaplygin) und Fourierreihen behandelt. Verf. vermeidet schwierigere Fragen und legt Schwergewicht auf Auseinandersetzung der wichtigsten Grundbegriffe und auf Übungsaufgaben.  
G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

Császár, Ákos: Sur les nombres de Lipschitz approximatifs. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 211—214 (1950).

In dieser Arbeit wird folgendes behandelt. Es sei  $f = f(x)$  eine eindeutige, reelle, endliche Funktion auf der Zahlgeraden, ferner sei  $a$  eine reelle Zahl mit  $0 < a < 1$ . Weiter sei  $Q(x; x'; a) = (f(x) - f(x')) : (x - x')^a$  und es seien die rechts- bzw. linksseitigen oberen und unteren Limiten von  $Q(x; x'; a)$  in  $x'$  bezeichnet mit  $\bar{L}_a^+ f(x')$  bzw.  $\bar{L}_a^- f(x')$  und  $\underline{L}_a^+ f(x')$  bzw.  $\underline{L}_a^- f(x')$ . Unter  $\bar{A}_a^+ f(x')$  usw. verstehe man die entsprechenden approximativen Limiten (bezogen auf das 1-dimensionale Lebesguesche Maß  $m_1$ ). A. S. Besicovitch hat [Math. Z. 30, 514—519 (1929)] gezeigt: Ist  $f$   $m_1$ -meßbar, so ist die Menge aller  $x$  mit  $\bar{L}_a^- f(x) < \bar{L}_a^+ f(x) < +\infty$  eine  $m_1$ -Nullmenge. Wie Verf. vorliegender Arbeit zeigt, bleibt dieser Satz richtig, wenn man  $\bar{A}_a^+, \bar{A}_a^-$  an Stelle von  $\bar{L}_a^+, \bar{L}_a^-$  treten läßt. Ferner beweist Verf. den Satz von Besicovitch (also für den Fall der  $\bar{L}_a^+, \bar{L}_a^-$ ) einfacher und zeigt, daß die Vor. der  $m_1$ -Meßbarkeit von  $f$  überflüssig ist.  
Haupt (Erlangen).

Menger, Karl: Stieltjes integrals considered as lengths. Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 173—175 (1949).

Existiert für zwei in einem Intervall  $[a, b]$  definierte Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  der  $\lim \sum f(x_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i))$  für jede Folge von Zerlegungen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \text{ mit } \lim \max (x_{i+1} - x_i) = 0,$$

so nennt Verf. diesen Limes das linksseitige Stieltjes-Integral von  $f$  und  $g$ . Man kann dieses Integral auffassen als die (verallgemeinerte) Länge  $\lim \sum \delta(x_i, x_{i+1})$  von  $[a, b]$ , die zu der Funktion  $\delta(x, y) = f(x)(g(y) - g(x))$  gehört. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen an, denen eine Funktion  $\delta(x, y)$  genügen

muß, damit die zu ihr gehörige Länge von  $[a, b]$  als linksseitiges Stieltjes-Integral aufgefaßt werden kann, daß m. a. W. zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  existieren derart, daß  $\delta(x, y) = f(x)(g(y) - g(x))$  ist. Nöbeling (Erlangen).

**Goodstein, R. L.:** On the evaluation of Planck's integral. *Edinburgh math. Notes* 37, 17—20 (1949).

Mit möglichst elementaren Mitteln geführter Beweis der beiden Gleichungen 
$$\int_0^{\infty} x dx / (e^x - 1) = 2 \int_0^1 \log(1+x) dx / x = \pi^2/6.$$
 Außer elementaren Sätzen über Grenzwerte und Integrale werden nur die Gleichung  $\log x = \int_1^x dt/t$ , die Eigenschaft von  $e^x$ , die einzige Umkehrfunktion von  $\log x$  zu sein, und eine Identität über die Funktion  $\cos x$  benutzt. Lochs (Innsbruck).

**Castro Brzezicki, A. de:** Über den Satz von Guldin-Pappus. *Gac. mat., Madrid* I. Ser. 1, 91—93 (1949) [Spanisch].

**Cesari, Lamberto:** On the representation of surfaces. *Amer. J. Math.* 72, 335—346 (1950).

Es wird folgender Satz bewiesen. Es sei  $F$  eindeutiges, stetiges Bild eines Quadrates in den  $E_3$ , ferner besitze  $F$  endlichen Lebesgueschen Oberflächeninhalt  $L(F)$ . Dann existiert eine (eindeutige, stetige) Abbildung  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$  des Quadrates  $Q = (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$  auf  $F$  mit folgenden Eigenschaften: (1) Die partiellen Ableitungen  $\mathfrak{x}'_u, \mathfrak{x}'_v$  existieren fast überall in  $Q$  und die Komponenten dieser Vektoren  $\mathfrak{x}'_u, \mathfrak{x}'_v$  sind quadratisch summierbar in  $Q$ ; (2) Fast überall in  $Q$  ist  $E = \mathfrak{x}'_u{}^2 = G = \mathfrak{x}'_v{}^2$  sowie  $F = \mathfrak{x}'_u \mathfrak{x}'_v = 0$ ; (3) Es wird  $L(F)$  dargestellt durch das klassische Integral, also  $L(F) = \int_Q (EG - F^2)^{1/2} du dv$ ; (4) Die Komponenten des Vektors  $\mathfrak{x}(u, v)$  sind von beschränkter Variation und absolut stetig in einer abgeschlossenen Teilmenge  $A$  von  $Q$  und fast überall in  $Q - A$  ist  $\mathfrak{x}'_u = \mathfrak{x}'_v = 0$ ; dabei existiert zu jedem Punkt  $P \in Q - A$  eine Umgebung  $U$  von  $P$ , deren Bild auf  $F$  den Oberflächeninhalt Null besitzt. Die Begriffe „beschränkte Variation“ und „absolut stetig“ werden dabei folgendermaßen definiert: Ist  $f(u)$  stetige Funktion der reellen Veränderlichen  $u$  im Intervall  $J = [a, b]$ , ist  $E$  eine abgeschlossene Menge mit  $E \subset J$  und  $u_i \in E$  mit  $u_i < u_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $u_1 \geq \alpha$ ,  $u_n \leq \beta$ , so ist die totale Variation auf  $E$  in  $[\alpha, \beta]$

$$V(f; E; \alpha, \beta) = \sup \left( \sum_{i=1}^{n-1} |f(u_i) - f(u_{i+1})| \right);$$

für alle „Einteilungen“  $(u_i)$  mit  $u_1 \geq \alpha$ ,  $u_n \leq \beta$ ,  $u_i \in E$ . Es heißt ferner  $f(u)$  absolut stetig auf  $E$ , wenn die Summe der Totalvariationen von  $f$  auf  $E$  in irgend endlich vielen, abgeschlossenen, fremden Teilintervallen von  $J$  beliebig klein ist bei hinreichend kleiner Gesamtlänge dieser Intervalle. Bedeutet  $A(u')$  die Menge der Punkte  $(u', v) \in A$ , so heiße  $h(u, v)$  auf  $A$  von beschränkter Variation, wenn die Funktion  $V(h(u', v); A(u'); 0, 1)$  von  $u'$  (fast überall endlich) sowie summierbar ist und wenn Gleiches bei Vertauschung von  $u$  und  $v$  gilt. Für absolute Stetigkeit wird überdies gefordert, daß  $h(u, v)$  als Funktion von  $v$  allein für fast alle  $u$  absolut stetig ist auf  $A(u)$  und ebenso bei Vertauschung von  $u$  mit  $v$ .

Haupt (Erlangen).

**Shah, S. M. and Omar Ali Siddiqi:** A note on series of positive terms. *J. Univ. Bombay, n. S.* 18, Nr. 3 (*Sci. Nr.* 26), 23—24 (1949).

Es handelt sich um die Konstruktion einer Beispielfunktion  $f(x) > 0$  für  $x \geq p$  derart, daß ihre Variation in  $(p, \infty)$  beschränkt ist, daß  $\sum_p^{\infty} f(n)$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(n) = 1$  ist. Dies Beispiel soll zeigen, daß weder der Satz von



Olivier (in der Arbeit als „Abelsches Theorem“ bezeichnet) noch der Verdichtungssatz von Cauchy aus der Voraussetzung der beschränkten Variation ableitbar sind.

Garten (Tübingen).

**Obrechhoff, Nikola:** Sur quelques propriétés des dérivées des fonctions d'une variable réelle. Acta Sci. math., Szeged **12 B**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos dedic., 231—235 (1950).

In dieser Arbeit wird unter anderem gezeigt: I. Vor. Es sei  $f = f(x)$  für  $x > a$  eindeutig, reell und endlich mit  $f^{(n)}(x) \geq 0$  für ein festes  $n \geq 1$  (mit  $x > a$ ). Ferner existiere ein ganzzahliges  $m$  mit  $0 \leq m < n$  und eine Folge reeller Zahlen  $x_r$  mit  $x_r \rightarrow +\infty$  für  $r \rightarrow +\infty$  derart, daß  $f(x_r): (x_r)^m \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow +\infty$ . — Beh. Für  $x > a$  gilt  $(-1)^{n-m-t} f^{(m+t)}(x) \geq 0$ ,  $t = 0, 1, \dots, n-m-1$ ; für  $x \rightarrow +\infty$  gilt ferner  $f^{(i)}(x): x^{m-i} \rightarrow 0$  bzw.  $f^{(j)}(x) \rightarrow 0$ , wenn  $0 \leq i \leq m-1$  bzw.  $m \leq j \leq n-1$ . II. Vor. Wie in I., aber mit  $a = -\infty$ . Außerdem existiere noch eine Folge  $x'_\mu$  mit  $x'_\mu \rightarrow -\infty$  für  $\mu \rightarrow +\infty$  und  $f(x'_\mu): (x'_\mu)^m \rightarrow 0$ . Beh. Es ist  $f(x)$  ein Polynom höchstens vom Grade  $m-1$ . — III. Ist  $f(x)$  absolut monoton (d. h. ist  $f$  beliebig oft differenzierbar mit  $f^{(k)}(x) \geq 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) für  $x < a$ , existiert ferner ein  $b < a$  mit  $f(x) < e^x$  für  $x \leq b$ , und  $f^{(n)}(b) < K$  für  $n = 0, 1, \dots$ , wobei  $K$  eine Konstante ist, so gilt  $f(x) = C e^x$ , wo  $C$  konstant. IV. Für die Differenzen von Folgen reeller Zahlen werden weiterhin Sätze bewiesen, die denen in I. und II. analog sind.

Haupt (Erlangen).

**Schoenberg, Isaac J. et Anne Whitney:** Sur la positivité des déterminants de translation des fonctions de fréquence de Pólya, avec une application à un problème d'interpolation. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1996—1998 (1949).

Eine Pólyasche Frequenzfunktion  $A(x)$ , d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad D = \text{Det} \|\Lambda(x_i - y_k)\|_{1,n} \geq 0$$

für  $x_1 < \dots < x_n$ ,  $y_1 < \dots < y_n$  und  $n = 1, 2, 3, \dots$  besitzt eine zweiseitige Laplace-Transformierte, deren Reziproke  $\Phi(s)$  eine ganze Funktion vom Laguerre-Pólyaschen Typus ist, und umgekehrt (I. J. Schoenberg, dies. Zbl. **29**, 366). Die Verf. geben nun notwendige und hinreichende Bedingungen an, ausgedrückt durch  $\Phi(s)$ , wann  $D = \text{Det} \|\Lambda(x_i - y_k)\|_{1,n} > 0$  ist. Diese liefern im besonderen die Lösbarkeitsbedingungen der Interpolationsaufgabe

$$F(x_i) = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+k+2,$$

wobei  $F(x)$   $k$ -mal stetig differenzierbar ist und in den Intervallen  $(-\infty, \xi_1)$ ,  $(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\dots$ ,  $(\xi_n, \infty)$  je ein Polynom vom Grad  $\leq k+1$  darstellt. Pfluger (Zürich).

**Hirschman, jr., I. I.:** Proof of a conjecture of I. J. Schoenberg. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 63—65 (1950).

Verf. beweist die folgende Vermutung von I. J. Schoenberg: Ist die Funktion  $f(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) beliebig oft differenzierbar, verschwindet sie außerhalb eines endlichen Intervalles identisch und hat  $f^{(n)}(t)$  genau  $n$  Zeichenwechsel für  $n = 0, 1, 2, \dots$ , so verschwindet  $f$  überhaupt identisch. Es gibt also im besonderen keine Pólyasche Häufigkeitsfunktion ( $\neq 0$ ), die außerhalb eines endlichen Intervalles verschwindet (I. J. Schoenberg, dies. Zbl. **29**, 366, I. I. Hirschmann, D. V. Widder, dies. Zbl. **30**, 393). Das Resultat hängt zusammen mit Sätzen von Pólya und Wiener [Trans. Amer. math. Soc. **52**, 249—256 (1942)] und Szegő [ebenda **52**, 450—462 (1942)] über die Schwankung der Ableitungen periodischer Funktionen.

Pfluger (Zürich).

**Finzi, Arrigo:** Un théorème sur les familles de transformations régulières. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 631—633 (1949).

Die vorliegende Note setzt eine andere desselben Verf. über den gleichen Gegenstand fort (dies. Zbl. **35**, 34). — Es werden somit wieder stetige Transformationen  $T$

einer geschlossenen Kurve in sich betrachtet, insbesondere in dem Fall, wo  $T$  und alle  $T^n$  fixpunktfrei sind. Es war in der vorherigen Note gezeigt worden, daß  $\lim m/n = \text{konst.}$  ist, wenn  $m$  die Anzahl der Umläufe ist, die ein Punkt  $P$  beim stetigen Übergang zu  $T^n(P)$  um die Kurve macht. Man nennt diese wichtige, vom Punkt  $P$  unabhängige irrationale Zahl den Modul  $k$  von  $T$ . Nunmehr werden wieder Transformationen  $x' = g(x, \vartheta)$  betrachtet, die vom Parameter  $\vartheta$  stetig abhängen, und folgender Satz behauptet: Bei Existenz der ersten und zweiten Ableitung von  $g$  mit Lipschitzbedingung nach  $x$  und  $\vartheta$  sowie Existenz einer positiven unteren Schranke für die Differenzenquotienten von  $k(\vartheta)$ , gibt es  $\infty^1$  stetig von  $\vartheta$  abhängige infinitesimale Transformationen  $\xi(x, \vartheta) d/dx$ , die insgesamt alle Transformationen der Schar erzeugen. Der Beweis hierfür ist in der Note nur angedeutet; ferner ist hingewiesen auf einige ungelöste Fragen betr. der Differenzierbarkeit von  $\xi(x, \vartheta)$  bezüglich der Argumente. Burau (Hamburg).

**Finzi, Arrigo:** Sulla generazione di una trasformazione finita assegnata su una curva chiusa mediante una trasformazione infinitesima. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 688—694. (1949).

In dieser Arbeit finden sich die Sätze und Probleme der beiden vorhergehenden C. r.-Noten (dies. Zbl. 35, 34 und vorsteh. Ref.) nochmals dargestellt nebst ergänzenden Bemerkungen über den Zusammenhang dieser Untersuchungen mit denen von Poincaré und Denjoy [vgl. Denjoy, J. Math. pur. appl., IX. S. 11, 333—375 (1932); dies. Zbl. 6, 305]; einige weitere ungelöste Fragen sind auch erwähnt. Burau (Hamburg).

**Gammel, J. L.:** A differentiation formula. Amer. math. Monthly 57, 96—99 (1950).

Die skalaren Veränderlichen  $x_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) seien  $(M+J)$ -mal differenzierbare Funktionen der Skalaren  $t$ , ihre  $k$ -ten Ableitungen nach  $t$  mit  $x_\nu^{(k)}$  bezeichnet. Ferner sei  $F(x_1, \dots, x_n; x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}; \dots; x_1^{(J)}, \dots, x_n^{(J)})$  eine skalare oder vektorielle Funktion der Veränderlichen  $x_\nu$  und ihrer Ableitungen, welche stetige partielle Ableitungen bis zur  $M$ -ten Ordnung besitzt. Die  $m$ -te Ableitung von  $F$  nach  $t$  ( $0 \leq m \leq M$ ) ist dann eine Funktion  $F_m(x_1, \dots, x_n; x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}; \dots; x_1^{(J+M)}, \dots, x_n^{(J+M)})$ , und für diese beweist Verf. die Formel

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_\nu^{(k)}} = \sum_{i=0}^J \binom{m}{k-i} \frac{\partial F_{m+i-k}}{\partial x_\nu^{(i)}} \quad (0 \leq k \leq M+J).$$

Als Anwendung folgt die Herleitung einer bekannten Summenformel für Produkte von zwei Binomialzahlen. Schönhardt (Stuttgart).

### Allgemeine Reihenlehre:

**Masip, R.:** Reihen. II. Gac. mat., Madrid, I. Ser. 1, 26—30 (1949) [Spanisch].

**Meseguer Muñoz, Juan-Bautista:** Sukzessive Produkte und Quotienten. Geometrische Progressionen höherer Ordnung. Mat. Elemental, Madrid, IV. S. 7, 137—140 (1947) [Spanisch].

**Kritikos, N.:** Une propriété de la moyenne arithmétique. Bull. Soc. math. Grèce 14, 111—117 und franz. Zusammenfassg. 117—118 (1949) [Griechisch].

Es seien  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )  $n$  reelle Zahlen und es sei  $a_{n+r}$  ( $r > 0$  ganz) gleich  $a_r$  gesetzt. Bildet man dann für ein festes natürliches  $m$  ( $1 < m < n$ ) die Zahlen

$$a_r^{(1)} = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} a_{r+s} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

und wiederholt diesen Prozeß unendlich oft, so konvergieren die auf diese Weise erhaltenen Folgen  $\{a_r^{(q)}\}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) für  $q \rightarrow \infty$  gegen das arithmetische Mittel der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Dinghas (Berlin).



Walsh, C. E.: Some series for  $\pi$ . Edinburgh math. Notes 37, 20—21 (1949).

Mit  $a_n + D_n a_n = D_{n-1} a_{n-1} + k_n a_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) wird

$$\sum_1^m a_n + D_m a_m = a_1 (1 + D_1 - k_1) + \sum_1^m k_n a_n,$$

daraus, wenn  $D_n a_n \rightarrow 0$  erfüllt ist:  $\sum a_n = a_1 (1 + D_1 - k_1) + \sum k_n a_n$ , falls beide Reihen konvergieren. Dies wird auf  $\pi/2 = \sum (n+1)!/3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$  angewandt, um neue Darstellungen für  $\pi$  zu gewinnen, z. B.

$$\pi = 10/3 - 6 \sum (n-1)!/(n+2)(n+3) \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1).$$

R. Schmidt (München).

Macintyre, A. J.: Euler's limit for  $e^x$  and the exponential series. Edinburgh math. Notes 37, 26—28 (1949).

Con procedimento molto semplice ed elementare, e senza ricorrere alla teoria degli sviluppi in serie di Taylor, si dimostra l'identità

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$$

(per  $z$  reale o complesso), supposto soltanto che uno dei due membri scritti sia un numero determinato e finito.

Tullio Viola (Roma).

Wilansky, Albert: A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. math. Soc. 55, 914—916 (1949).

Die Matrix  $A = (a_{nk})$  führe die Folge  $x = \{x_n\}$  in die Folge

$$Ax = \{A_n(x)\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right\}$$

über. Hat die Gleichung  $y = Ax$ , sobald  $y$  irgendeine gegebene konvergente Folge bedeutet, eine eindeutige Lösung  $x$ , so heißt die Matrix umkehrbar (reversibel). Ist  $A$  umkehrbar, so gibt es eine beschränkte Folge  $\{c_n\}$  und eine Matrix  $B = (b_{nk})$ , so daß für eine konvergente Folge  $y$  die Gleichung  $y = Ax$  gilt und  $x = \{x_n\}$ ,

$x_n = c_n \lim_r y_r + \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} y_k$  ist und überdies die Reihe stets konvergiert. Verf.

definiert nun -- in Übereinstimmung mit dem Fall normaler Matrizen (d. h.  $a_{nk} = 0$

für  $k > n$ ,  $a_{nn} \neq 0$ ) --  $\|A^{-1}\| = \sup_n \left( |c_n| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \right)$  und gibt nun für umkehr-

bare Matrixmethoden eine notwendige und hinreichende Bedingung an: Eine umkehrbare konvergenztreue Matrix  $A$  limitiert eine divergente Folge dann und nur dann, wenn  $\|A^{-1}\| = \infty$ . -- Der Beweis stützt sich auf Methoden von Mazur und Banach.

Garten (Tübingen).

Basu, S. K.: Note on some theorems on the Hölder and Cesàro means. Bull. Calcutta math. Soc. 40, 129—134 (1948).

Verf. zeigt für die Cesàroschen und Hölderschen Mittel der Ordnung  $\alpha$  zunächst, daß aus  $C_n^\alpha = O(n^r)$  stets auch  $H_n^\alpha = O(n^r)$  folgt, wenn  $r > 0$  und  $\alpha > -1$  ist, und umgekehrt. Sodann fragt er, ob dieser Satz auch noch richtig bleibt, wenn  $O$  durch  $O_L$  ersetzt wird. Bei gegebenem  $\alpha > -1$  bezeichnet er mit  $X(\alpha)$  den Schluß „Aus  $C_n^\alpha \geq 0$  für alle  $n$  folgt  $H_n^\alpha \geq 0$  für alle  $n$ “, mit  $Y(\alpha)$  dessen Umkehrung, mit  $X'(\alpha)$  den Schluß „Bei gegebenem  $r > 0$  folgt aus  $C_n^\alpha = O_L(n^r)$  stets  $H_n^\alpha = O_L(n^r)$ “, und mit  $Y'(\alpha)$  die entsprechende Umkehrung. Dann beweist er: 1.  $X(\alpha)$  und  $X'(\alpha)$  sind äquivalent. — 2.  $Y(\alpha)$  und  $Y'(\alpha)$  sind äquivalent. — 3. Für  $0 \leq \alpha \leq 1$  ist  $Y(\alpha)$  richtig, aber  $X(\alpha)$  falsch und  $Y'(\alpha)$  richtig, aber  $X'(\alpha)$  falsch. — 4. Für  $\alpha > 1$  ist  $X(\alpha)$  richtig,  $Y(\alpha)$  falsch, und  $X'(\alpha)$  richtig,  $Y'(\alpha)$  falsch. — 5. Für  $-1 < \alpha < 0$  ist  $X(\alpha)$  richtig,  $Y(\alpha)$  falsch und  $X'(\alpha)$  richtig,  $Y'(\alpha)$  falsch. — Entsprechende Sätze werden für zwei äquivalente Hausdorffsche Mittelbildungen mit nicht verschwindenden Momentenfolgen aufgestellt.

Garten (Tübingen).

Basu, S. K.: On the total relative strength of the Riesz and Hölder methods. Bull. Calcutta math. Soc. **40**, 153—162 (1948).

Verf. beweist die folgenden drei Sätze über Höldersche und Rieszsche Mittel.  
1. Es sei  $0 < k < 1$ . Aus  $H_n^k \rightarrow +\infty$  folgt nicht  $R^k(\omega) \rightarrow +\infty$ . — 2. Sei  $k > 1$ . Aus  $H_n^k \rightarrow +\infty$  folgt nicht  $R^k(\omega) \rightarrow +\infty$ . — 3. Sei  $k > 1$ . Aus  $R^k(\omega) \rightarrow +\infty$  folgt nicht  $H_n^k \rightarrow +\infty$ . — Im letzten Teil der Arbeit wird eine Übersicht über die in der vorliegenden und in zwei früheren Arbeiten des Verf. erzielten Ergebnisse, die sich auf die „totale relative Stärke“ (d. h. mit Einschluß der Grenzwerte  $\pm \infty$ ) der Hölderschen, Cesàroschen und Rieszschen Mittelbildungen beziehen, gegeben.

Garten (Tübingen).

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Olovjanišnikov, V. M.: Abschätzung des Restes bei Approximation nicht-periodischer Funktionen, die einer Lipschitzbedingung genügen, durch Polynome, die auf einem vorgegebenen Punktsystem die besten sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **71**, 613—616 (1950) [Russisch].

Kozlov, V. Ja.: Über die Verteilung der positiven und negativen Werte orthogonaler und normierter Funktionen, die ein vollständiges System bilden. Mat. Sbornik, n. S. **23**, 475—480 (1948) [Russisch].

Soit  $\{\varphi_n(x)\}$  un système de fonctions orthogonales et normales dans  $L_2[0, 1]$ . Posons  $\varphi_n^+(x) = \varphi_n(x)$  si  $\varphi_n(x) \geq 0$  et  $\varphi_n^+(x) = 0$  si  $\varphi_n(x) < 0$  et  $\bar{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_n^+(x)$ . L'A. démontre le théorème suivant: Si le système  $\{\varphi_n(x)\}$  est complet, les séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^+(x)$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n^2(x)$  sont divergente presque partout. N. Obrechhoff.

Fine, N. J.: On the Walsh functions. Trans. Amer. math. Soc. **65**, 372—414 (1949).

Se  $\{\Phi_n(x)\}$  è il sistema delle funzioni di Rademacher definito dalle relazioni  $\Phi_0(x) = 1$  per  $0 \leq x < 1/2$ ,  $\Phi_0(x) = -1$  per  $1/2 \leq x < 1$ ,  $\Phi_0(x+1) = \Phi_0(x)$ ,  
 $\Phi_n(x) = \Phi_0(2^n x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

il sistema  $\{\Psi_n(x)\}$  di Walsh si definisce con le relazioni

$\Psi_0(x) = 1$ ,  $\Psi_n(x) = \Phi_{n_1}(x) \Phi_{n_2}(x) \cdots \Phi_{n_r}(x)$ , per  $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$  con  $n_1 > n_2 > \cdots > n_r$ . — Il sistema  $\{\Psi_n(x)\}$  è ortonormale e completo in  $(0,1)$  e se  $f(x)$  è una funzione sommabile in  $(0,1)$  l'A. chiama serie di Walsh-Fourier la serie

$$(1) \quad f(x) \sim c_0 + c_1 \Psi_1(x) + c_2 \Psi_2(x) + \cdots + c_n \Psi_n(x) + \cdots$$

dove

$$c_n = \int_0^1 \Psi_n(x) f(x) dx \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Queste serie sono state studiate da Kaczmarz, Steinhaus, Paley, e da Walsh che ha posto in evidenza alcune proprietà comuni alle sue serie e a quelle trigonometriche di Fourier. L'A. dopo aver riassunto nella sua memoria i risultati più noti, li estende largamente in varie direzioni; egli rende il suo compito più agevole e la trattazione più elegante grazie all'identificazione delle funzioni di Walsh con i caratteri di un gruppo additivo in un certo campo topologico. — L'A. pone pure in risalto alcune differenze tra le serie trigonometriche di Fourier e le serie di Walsh-Fourier e indica varie questioni sull'ordine di grandezza dei coefficienti delle serie (1) [n. 4], sul comportamento di certe somme [n. 8], sui teoremi di unicità [n. 9] suscettibili di ulteriore approfondimento. Giovanni Sansone (Firenze).

Zamansky, Marc: Sur l'approximation des fonctions continues périodiques. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1838—1840 (1949).



The au. gives the formula

$$\tilde{\sigma}_n(x) - \tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{1/n} t^{-1} [f(x+t) - f(x-t)] dt + O(\omega(1/n)),$$

where  $\tilde{f}$  is the conjugate function to  $f$ ,  $\sigma_n$  is the Fejér mean of  $f$  and  $\omega(h)$  the modulus of continuity of  $f$ . He also discusses the saturation classes of the method of approximation defined by

$$(1) \quad T_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k/n) (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

here  $a_k, b_k$  are the Fourier constants of  $f$ , and  $g(u)$  is a polynomial in  $u$  such that  $g(0) = 1$ ,  $g(1) = g'(0) = \dots = g^{(p-1)}(0) = 0$ ,  $g^{(p)}(0) \neq 0$ . In the case when  $g(u) = 1 - u$ , (1) is the Fejér mean of  $f$ . G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

**Zamansky, Mare:** Sur les séries trigonométriques. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 44—46 (1950).

The au. derives some consequences of the hypothesis  $E_n(f) = O(1/n)$ , namely that is this case  $\int_0^h t^{-1} [f(x+t) - f(x)] dt = f(x+h) - f(x) + O(h)$ , and

$\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n(x) = f(x+h) - f(x) + O(h)$ . Here  $\tilde{f}$  is conjugate to  $f$ ,  $\sigma_n$  is the Fejér sum of  $f$  and  $n = [1/h]$ . He also gives applications of the last theorem to Fourier series ( $T$ ) of an integrable function  $f(x)$ , for instance: (a) If for the partial sum  $S_n(x)$  of ( $T$ ),  $n^{-1} S'_n(x) = O(1)$  uniformly in  $x$ , then  $S_n(x) - h^{-1} [F(x+h) - F(x)] = O(1)$ , where  $F(x)$  is the indefinite integral of  $f$ . (b) If  $n^{-1} S'_n(x) = o(1)$  uniformly, then ( $T$ ) converges almost everywhere. (c) If  $f \sim \sum (a_{n_p} \cos n_p x + b_{n_p} \sin n_p x)$  and the integers  $n_p$  have the property  $\sum_{k=1}^p n_k = O(n_p)$ , then ( $T$ ) converges a. e.

[Ref. remarks, that (c) also follows from a Tauberian theorem of the Abel method (G. G. Lorentz, this Zbl. **32**, 60)]. G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

**Winslow, A. M.:** A simplified method of differentiating and evaluating functions represented by Fourier series. Quart. appl. Math. **7**, 423—425 (1950).

È noto che se una funzione  $f(x)$  ha derivate prima e seconda continue in  $(-a, a)$  perchè la serie di Fourier di  $f(x)$  sia derivabile termine a termine occorre e basta che sia  $f(a) = f(-a)$ . L'A. propone il seguente artificio, ben noto a chi abbia familiarità con gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali, di aggiungere a  $f(x)$  un termine lineare in modo da ottenere una funzione  $g(x)$  con  $g(a) = g(-a)$ ;  $f(x)$  sarà così la somma di un termine lineare e della serie di Fourier di  $g(x)$ , sviluppo che è derivabile termine a termine. Analogamente per le derivate di ordine superiore. In altre parole  $f(x)$  non viene sviluppata in serie di Fourier, ma secondo un sistema di funzioni tale che derivandolo quanto volte interessa si riduce a quello di Fourier.

Sandro Faedo (Roma).

**Szász, O.:** On the Gibb's phenomenon for Euler means. Acta Sci. math., Szeged **12 B**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 107—111 (1950).

Die Mitteilung enthält die Entwicklung einer Methode zur Untersuchung der Gibbsschen Erscheinung bei den Eulerschen Mitteln einer Fourierreihe, die sich in ähnlicher Weise auch bei Hausdorffschen und Borelschen Mitteln anwenden läßt. Verf. wendet zunächst die Eulerschen Mittel

$$\sigma_n(r) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} r^\nu (1-r)^{n-\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots; 0 < r \leq 1)$$

auf die Teilsummenfolge der Standardreihe  $(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sin nt)/n = (\pi - t)/2$  an und beweist den Satz 1: Für die  $E$ -Mittel der Reihe (1) gilt

$$\lim \sigma_n(t_n) = \int_0^{\pi} y^{-1} \sin y dy \quad \text{für } nt_n \rightarrow \tau, \quad nt_n^2 \rightarrow 0,$$

und stets  $\overline{\lim} \sigma_n(t_n) \leq \int_0^\pi t^{-1} \sin t dt$ . — Daraus folgert er für eine weitere Klasse von Fourierreihen den Satz 2: Wenn  $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_n^{\lambda n} (|b_n| - b_n) = 0$  gilt und wenn  $f(t)$  bei  $t = 0$  eine einfache Unstetigkeit besitzt, dann weisen die Eulerschen Mittel der Reihe  $f(t) \sim \sum_1^\infty b_n \sin nt$ ,  $b_n = (2/\pi) \int_0^\pi f(t) \sin nt dt$  dieselbe Gibbssche Erscheinung wie in Satz 1 auf. Garten (Tübingen).

**Bochner, S. and K. Chandrasekharan:** Fourier series of  $L_2$ -functions. Duke math. J. 16, 579—583 (1949).

Soit  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  une fonction périodique de période  $2\pi$  de la classe  $L_2$  dans  $0 \leq x_i < 2\pi$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , dont la série multiple de Fourier est

$$f(x_1, \dots, x_k) \sim \sum a_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)}.$$

Désignons par  $(\nu^2 = n_1^2 + \dots + n_k^2)$

$$S^\delta(R) = \sum_{\nu^2 \leq R^2} (-\nu^2/R^2)^\delta a_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)},$$

$$f_0(t) \equiv f_0(x, t) = \Gamma(k/2) 2^{-1} \pi^{-k/2} \int_\sigma f(x_1 + t \xi_1, \dots, x_k + t \xi_k) d\sigma_\xi,$$

où  $\sigma$  est la sphère  $\xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 = 1$  et  $d\sigma_\xi$  son élément, et,  $p > 0$ ,

$$f_p(t) \equiv f_p(x, t) = (2/B(p, k/2) t^{2p+k-2}) \int_0^t (t^2 - s^2)^{p-1} s^{k-1} f_0(s) ds,$$

où  $B$  est la fonction d'Euler. — Les Au. démontrent le théorème suivant: Supposons que pour un point  $x$  fixe on a  $(1) \int_\lambda^{2\lambda} \{S^\delta(R)\}^2 dR = o(\lambda)$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  pour un

$\delta > \frac{1}{2}(k-1)$ . Alors pour  $p = \delta + \frac{1}{2}(3-k)$  on a  $\int_0^t \{f_p(u)\}^2 du = o(t)$ ,  $t \rightarrow 0$ .

Le même résultat reste valable encore pour  $\delta = \frac{1}{2}(k-1)$  si (1) est satisfait uniformément dans l'intervalle  $\frac{1}{2}(k-1) \leq \delta \leq \delta_0$ . N. Obrechhoff (Sofia).

**Boas jr., R. P.:** Fourier series with a sequence of positive coefficients. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 35—37 (1950).

In questa breve Nota l'A. dimostra che se  $\epsilon f(\Theta) \sim \sum_{n=0}^\infty c_n e^{in\Theta}$ , con i  $c_n$  reali, se la successione  $\{c_n\}$  verifica una condizione che limita in essa i cambiamenti di segno e se  $f(\Theta)$  ha la derivata  $p^{\text{ma}}$  integrabile in un conveniente intorno di  $\Theta = 0$ , allora  $f(\Theta)$  possiede ovunque la derivata  $(p-1)^{\text{ma}}$ . Sandro Faedo (Roma).

**Loo, Ching-Tsün:** On the uniform Cesàro summability of certain special trigonometrical series. Amer. J. Math. 72, 129—134 (1950).

Si ponga  $\Delta^0 \lambda_\nu = \lambda_\nu$ ,  $\Delta^1 \lambda_\nu = \Delta \lambda_\nu = \lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}$ ,  $\Delta^k \lambda_\nu = \Delta(\Delta^{k-1} \lambda_\nu)$  per  $k \geq 1$ . L'A., estendendo una proposizione de A. Zygmund, ottiene il seguente risultato: „Se  $\lambda_\nu \rightarrow 0$  e  $\Delta^{k+1} \lambda_\nu \geq 0$ , allora le serie che si ottengono derivando  $k$  volte

$$\frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu \cos \nu \Theta, \quad \sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu \sin \nu \Theta \quad (k \text{ intero non negativo})$$

sono sommabili uniformemente  $(C, k)$  in ogni intervallo  $(\epsilon, \pi - \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$ “.

Sandro Faedo (Roma).

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

**Richard, Ubaldo:** Osservazioni sulla bisezione delle funzioni ellittiche di Weierstrass. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 395—397 (1949).

Einordnung der biquadratischen Gleichung für  $\wp(u/2)$ , deren Beiwerte in  $g_2$ ,  $g_3$  und  $\wp(u)$  rational sind, in das Lösungsverfahren für reziproke Gleichungen.

Wilh. Maier (Jena).



**Ward, Morgan:** Arithmetical properties of the elliptic polynomials arising from the real multiplication of the Jacobi functions. *Amer. J. Math.* **72**, 284—302 (1950).

Die vom Verf. in dies. Zbl. **35**, 37 über dem Ring aller ganzen rationalen Zahlen und über dem Körper aller komplexen Zahlen behandelte Funktionalgleichung

$$\omega_{m-n} \omega_{m+n} = \omega_{m-1} \omega_{m+1} \omega_n^2 - \omega_{n-1} \omega_{n+1} \omega_m^2$$

kann übertragen werden auf allgemeinere Ringe. Die von Weierstraß, Frobenius u. a. benutzten Brüche  $\frac{\theta(nu)}{[\theta(u)]^{n^2}}$  führen je nach Geradheit von  $n$  auf vier elliptische

Polynomfolgen in  $\operatorname{sn}(u)$  der Grade  $(n^2 - 4)$ ,  $(n^2 - 1)$  oder  $n^2$ . Der Fall verschwindender Diskriminante, welcher auf Kreisteilung zurückfällt, wurde von Lucas und von D. H. Lehmer [*Ann. Math.*, Princeton, II. S. **31**, 419—448 (1930)] behandelt. Werden  $\operatorname{sn}^2(u)$  und  $k^2$  vorgegeben als algebraische Zahlen, so gehen die oben erwähnten Polynome in vier Folgen algebraischer Zahlen über, deren Teilbarkeitseigenschaften untersucht werden. Im Theorem II wird die Sonderstellung der besonders einfachen „elliptic divisibility sequences“ gekennzeichnet. *Wilh. Maier (Jena).*

**Kneser, Hellmuth:** Die Potenzreihe der reziproken Gammafunktion. *Math. Z.*, Berlin **52**, 655—668 (1950).

Zur Untersuchung der  $c_n$  in der Potenzreihe  $\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} s^n$  geht Verf.

vom Hankelschen Integral  $\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int w^{s-1} e^w dw$  aus. Er setzt  $w = e^z$  und findet durch Potenzreihenentwicklung und gliedweise Integration  $\pi c_n = \operatorname{Im} H_0$ ,  $H_0 = \int_H z^n \exp(e^z) dz$ , wobei  $H$  ein Weg ist, der von  $\pi$  über  $\pi + \beta i$  nach  $\beta i + \infty$  führt (mit  $\pi/2 < \beta < \pi$ ). Die Betragsfläche des Integranden hat eine Mulde bei  $z = 0$  und ein Tal, das sich zwischen  $\pi i/2$  und  $3\pi i/2$  horizontal nach rechts ins Unendliche erstreckt. Von der Mulde ins Tal führt ein Paß, über dessen Sattelpunkt  $p$  der Integrationsweg zweckmäßig gelegt wird.  $p$  muß eine Lösung der Gleichung  $z e^z = -n$  sein. Diese Gleichung hat für  $n \geq 1$  genau eine Wurzel  $p$  im Streifen  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , nämlich  $p = \pi i + \log n - \log \log n + \mathfrak{P}$ , worin  $\mathfrak{P}$  eine für hinreichend großes  $n$  konvergierende Doppelpotenzreihe ohne konstantes Glied in  $1/\log n$  und  $\log \log n / \log n$  ist (sie wird bis zu den Gliedern 3. Grades angegeben). Wird nun  $\beta = \operatorname{Im} p$  gewählt, so führt der horizontale Teil von  $H$  für hinreichend große  $n$  über  $p$ . Die Auswertung des Integrales  $H_0$  ergibt

$$c_n = \sqrt{2 \log n / \pi n} \cdot \operatorname{Im} [p^n e^{-n/p} (1 + o(1))].$$

Um auch über die Vorzeichenwechsel der  $c_n$  ein Bild zu bekommen, wird das Integral  $dH_0/dn = H_0 \log p + \int_H \log(z/p) z^n \exp(e^z) dz$  untersucht und  $d \arg H_0/dn \sim \pi / \log n$  gefunden, woraus folgt, daß eine bei einer Nummer  $n$  beginnende vollständige Folge von Koeffizienten  $c_r$  festen Vorzeichens eine Länge  $\sim \log n$  hat. — Im letzten Absatz auf S. 656 soll es richtig heißen  $(k + 1/4)\pi < \varphi < (k + 3/4)\pi$  statt  $(k + 1/2)\pi < \varphi < (k + 3/2)\pi$ . *Lochs (Innsbruck).*

**Tricomi, Francesco:** Sulle funzioni di Bessel di ordine e argomento pressochè uguali. *Atti Accad. Sci. Torino*, Cl. I, **83**, 3—20 (1949).

Die Besselsche Differentialgleichung  $x^2 y'' + x y' + (x^2 - v^2) y = 0$  wird durch die Substitution  $x = r + \sqrt[3]{r/6} t$ ,  $\mu = 6^{-1/3} r^{-2/3}$  auf die Differentialgleichung

$$(1) \quad d^2 y / dt^2 + \frac{1}{3} t y = -\mu \{ (2t + \mu t^2) d^2 y / dt^2 + (1 + \mu t) dy / dt + \frac{1}{6} t^2 y \}$$

übergeführt.  $\mu = 0$  führt auf die Airyschen Funktionen

$$A_1(t) = \pi/3 \sqrt[3]{t/3} \{ J_{-1/3}(2(t/3)^{3/2}) + J_{1/3}(2(t/3)^{3/2}) \}$$

$$A_2(t) = \pi/3 \sqrt[3]{t} \{ J_{-1/3}(2(t/3)^{3/2}) - J_{1/3}(2(t/3)^{3/2}) \};$$

(1) werden nun zwei Volterrasche Integralgleichungen zugeordnet, deren Lösung mittels der klassischen Methode der iterierten Kerne bei reellem, positivem  $\nu$  zu den beiden asymptotischen Darstellungen führt:

$$\pi J_\nu \left( \nu + \sqrt[3]{\nu/6} t \right) = \sqrt[3]{6/\nu} A_1(t) - 10^{-\nu} (3t^2 A'_1(t) + 2t A_1(t)) + O(\nu^{-5/3}),$$

$$\pi N_\nu \left( \nu + \sqrt[3]{\nu/6} t \right) = -\sqrt[3]{6/\nu} A_2(t) + 10^{-\nu} (3t^2 A'_2(t) + 2t A_2(t)) + O(\nu^{-5/3}),$$

die für alle endlichen, von  $\nu$  unabhängigen reellen  $t$  gültig sind. Sie verbessern die Nicholsonschen Näherungsformeln, indem sie obere Schranken für den Fehler angeben; die angewandte Methode gestattet auch, beliebig viele weitere Glieder anzugeben und damit eine Poincarésche asymptotische Entwicklung der Besselfunktionen zu geben. Zum Schluß macht Verf. eine Anwendung zur Bestimmung von asymptotischen Werten der ersten Nullstellen von  $J_\nu$  und  $N_\nu$ . Volk (Würzburg).

Phillips, R. S. and Henry Malin: Bessel function approximations. Amer. J. Math. **72**, 407—418 (1950).

Sia  $n \geq 0$  e si consideri la cosiddetta funzione modificata di Bessel

$$I_n(\nu) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\nu/2)^{n+2r}}{r! \Gamma(n+r+1)} \quad [I_n(\nu) \doteq i^{-n} J_n(i\nu)].$$

Postò  $\Phi_n(\nu, \alpha) = (n/\nu^2) [1 + (\nu/\alpha)^2]^{1/2}$  l'A. nota che la funzione

$$Z = \nu^{-1} I'_n(\nu)/I_n(\nu) - \Phi_n(\nu, \alpha)$$

soddisfa l'equazione di Riccati

$$\begin{aligned} dZ/d\nu = & -\nu Z^2 - (2/\nu) \{n [1 + (\nu/\alpha)^2]^{1/2} + 1\} Z \\ & + \nu^{-1} - (n/\alpha)^2 \nu^{-1} - (n/\alpha^2) \nu^{-1} [1 + (\nu/\alpha)^2]^{-1/2}; \end{aligned}$$

i punti estremanti delle curve integrali di questa equazione appartengono a due curve del semipiano  $\nu \geq 0$ , e da tale circostanza l'A. deduce che per  $n \geq 1$ ,  $\nu > 0$ , la derivata logaritmica di  $I_n(\nu)$  e la derivata  $[\nu^{-1} I'_n(\nu)/I_n(\nu)]'$  soddisfano le limitazioni

$$\Phi_n\{\nu, [n(n+1)]^{1/2}\} < \nu^{-1} I'_n(\nu)/I_n(\nu) < \Phi_n(\nu, n),$$

$$\Phi'_n(\nu, n) < [\nu^{-1} I'_n(\nu)/I_n(\nu)]' < \Phi'_n\{\nu, [n(n+1)^2(n+2)]^{1/4}\}.$$

Passando alla cosiddetta funzione modificata di Hankel  $K_n(z) = 2^{-1} \pi i^{n+1} H_n^{(1)}(iz)$  l'A. osserva che la funzione  $Z = -\nu^{-1} K'_n(\nu)/K_n(\nu) - \Phi_n(\nu, \alpha)$  soddisfa l'equazione di Riccati

$dZ/d\nu = \nu Z^2 + (2/\nu) \{n [1 + (\nu/\alpha)^2]^{1/2} - 1\} Z - \nu^{-1} + (n/\alpha)^2 \nu^{-1} - (n/\alpha^2) \nu^{-1} [1 + (\nu/\alpha)^2]^{-1/2}$ , e con un procedimento un po' più laborioso del precedente in quanto i valori di  $Z$  che annullano il secondo membro dell'ultima equazione non sono sempre reali, l'A. per  $n \geq 1$ ,  $\nu > 0$  prova le seguenti limitazioni

$$\Phi_n(\nu, n) < -\nu^{-1} K'_n(\nu)/K_n(\nu) < \Phi_n\{\nu, [n(n-1)]^{1/2}\},$$

$$\Phi'_n\{\nu, [n(n-1)^2(n-2)]^{1/4}\} < [-\nu^{-1} K'_n(\nu)/K_n(\nu)]' < \Phi'_n(\nu, n).$$

Giovanni Sansone (Firenze).

Wilkins jr., J. Ernest: The general term of the generalized Schlömilch series. Amer. J. Math. **72**, 187—190 (1950).

Sia  $J_\nu(u)$  la funzione di Bessel di prima specie di ordine  $\nu$

$$J_\nu(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}u\right)^{\nu+2n} / \Gamma(n+1) \Gamma(\nu+n+1),$$

e  $H_\nu(u)$  la funzione di Struve di ordine  $\nu$

$$H_\nu(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}u\right)^{\nu+2n} / \Gamma(n+3/2) \Gamma(\nu+n+3/2).$$

L'A., ragionando per assurdo, prova che se per tutti i valori di  $x$  appartenenti ad un insieme di misura positiva

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}mx\right)^{-\nu} (a_m J_\nu(mx) + b_m H_\nu(mx)) = 0$$



allora:

- (1) se  $-\infty < \nu \leq \frac{1}{2}$  si ha  $a_m = o(m^{\nu+1/2})$ ,  $b_m = o(m^{\nu+1/2})$ ,  
 (2) se  $\nu > \frac{1}{2}$  si ha  $a_m = o(m^{\nu+1/2})$ ,  $b_m = o(m)$ .

Giovanni Sansone (Firenze).

**Delerue, Paul:** Sur l'utilisation des fonctions hyperbesséliennes à la résolution d'une équation différentielle et au calcul symbolique à  $n$  variables. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 912—914 (1950).

Ist in der Bezeichnung des „symbolischen Kalküls“  $\varphi(p, q) \subset f(x, y)$ , so läßt sich das Original zu  $p^{mk} q^{nk'} \varphi(1/p^m, 1/q^n)$  als Doppelintegral über das Produkt von zwei hyperbesselschen Funktionen (vgl. Delerue, dies. Zbl. **34**, 211) darstellen. Verf. teilt außerdem ohne Beweis mit, daß die Differentialgleichung  $y^{(n)} + x^q y = 0$  durch ein Fundamentalsystem von hyperbesselschen Funktionen mit dem Argument  $n(n+q)^{-1} x^{(n+q)/n}$  integriert werden kann.

W. Hahn (Berlin).

**Grad, Harold:** Note on  $N$ -dimensional Hermite-polynomials. Commun. pure appl. Math., New York **2**, 325—330 (1950).

Der Definition der Hermiteschen Polynome in  $n$  Dimensionen hat der Verf. eine neue Seite abgewonnen, indem er diese Polynome in tensor-invarianter Bezeichnung darstellt. Dazu werden alle Hermiteschen Polynome vom Grad  $n$  in den Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_k$  in geeigneter Weise zu einem Tensor  $n$ -ter Stufe zusammengefaßt. So enthält der Tensor erster Stufe  $H_i = x_i$  die Hermiteschen Polynome vom Grad 1, der Tensor zweiter Stufe  $H_{ij} = x_i x_j - \delta_{ij}$  jene vom Grad 2 (z. B.  $x_1^2 - 1, x_1 x_2$  usw.), der Tensor dritter Stufe

$$H_{ijk} = x_i x_j x_k - x_i \delta_{jk} - x_j \delta_{ki} - x_k \delta_{ij}$$

jene vom Grad 3. Einfache allgemeine Darstellungen und Eigenschaften dieser Tensoren werden angegeben, die Orthogonalitätseigenschaften werden bewiesen und das Normierungsintegral wird berechnet und schließlich wird der Entwicklungssatz formuliert.

J. Meixner (Aachen).

**Sansone, Giovanni:** Due semplici limitazioni nel campo complesso delle funzioni associate ai polinomi di Tchebychef-Hermite e del termine complementare della loro rappresentazione asintotica. Math. Z., Berlin **52**, 593—598 (1950).

Verf. zeigt: Setzt man  $f_n(x) = \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{x^2/2} d^n/dx^n e^{-x^2}$ , ferner  $N = 2n + 1$  und  $A(x) = 2^{1/4} \pi^{-1/2} + N^{-1/4} |x|^{5/2}$ , so gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq N^{-1/4} A(x), \quad |f'_n(x)| \leq N^{1/4} A(x) \quad (x \text{ reell, } n \text{ gerade}) \\ |f_n(x)| &\leq 2 N^{-1/4} \exp[N^{1/2} |v| (1 + N^{-1} (u^2 + v^2))] A(\sqrt{u}) \quad (x = u + i v). \end{aligned}$$

Das Bemerkenswerte ist dabei die sehr einfache Herleitung. Sie stützt sich auf eine für  $f_n(x)$  geltende Volterrassche Integralgleichung [Kowalik, Math. Z. **31**, 502 (1930)], deren Kern abgeschätzt wird. Sie gestattet auch, für  $f_{2n}(x)$  eine mit  $f_{2n}(0) \cos(N^{1/2} x) + f_{2n}(0) N^{-1/2} (x^3/6) \sin(N^{1/2} x)$  beginnende asymptotische Entwicklung abzuleiten.

W. Hahn (Berlin).

**Lauwerier, H. A.:** The asymptotic expansion of the confluent hypergeometric function  $M_{\omega/2,0}(2\omega)$ . Proc. Akad. Wet., Amsterdam **53**, 188—195 (1950); Indag. math., Amsterdam **12**, 26—33 (1950).

Verf. gibt für das Restglied  $U_n$  der bereits in einer vorhergehenden Arbeit (The use of confluent hypergeometric functions in mathematical physics and the solution of an eigenvalue problem. Appl. Sci. Res. (A) **1950**) gegebenen asymptotischen Darstellung

$$\begin{aligned} M_{\omega/2,0}(2\omega) &= 2^{1/2} \omega^{1/6} \cos(\omega/2 - 1/6) \pi \sum_0^{[n-1/6]} m_{6p} \Gamma(2p + 1/3) \omega^{-2p} \\ &+ 2^{1/2} \omega^{-1/6} \cos(\omega/2 + 1/6) \pi \sum_0^{[n-5/6]} m_{6p+4} \Gamma(2p + 1 + 2/3) \omega^{-2p-1} + U_n \end{aligned}$$

eine numerische Abschätzung; er erhält:

$$|m_k| < s \cdot (2/\pi)^{k+4/3} \{0,64 + 3(k+1)^{-1} 2^{-k+1/6}\}; \text{ mit } \begin{matrix} s = 1 \text{ für } k \equiv 0 \pmod{6} \\ s = 2 \text{ für } k \equiv 4 \pmod{6} \end{matrix}$$

$$|U_n| \leq 27^{1/6} \omega^{1/2} 3^{-1} \pi^{-5/3} \{|\cos \omega \pi/2| (\gamma_0 + c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2) e_{n-1} + (\gamma_0 + c_3 \gamma_1) e_{n+1}\}, \\ n \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\leq 27^{1/6} \omega^{1/2} 3^{-1} \pi^{-5/3} \{|\cos \omega \pi/2| (\gamma_0 + c_4 \gamma_1) e_{n-1} + \gamma_0 e_{n+1}\}, \quad n \equiv 0 \pmod{6},$$

wo

$$\gamma_v = \Gamma\left(\frac{n+v+1}{3}\right) \omega^{-(n+v+1)/3}, \quad (v = 0, 1, 2)$$

$$c_1 = 2(1 + \sqrt{3})(2/\pi)^{1/3} \approx 4,7005, \quad c_2 = (3 + 2\sqrt{3})(2/\pi)^{2/3} \approx 4,7837,$$

$$c_3 = \sqrt{3}(2/\pi)^{1/3} \approx 1,4900, \quad c_4 = (2 + \sqrt{3})(2/\pi)^{1/3} \approx 3,2105,$$

$$e_n = 1/\pi \int_1^\infty (t^2 - 1)^{-1/2} (\Theta^2 + (\pi^2/4))^{-(n/6)} dt, \quad \Theta = t + 1/2 \ln(t - 1/t + 1),$$

$$|e_n| \leq (2/\pi)^{n/3+1} \{0,64 + 3 \cdot 2^{-n/16} \cdot n^{-1}\}.$$

In dem numerischen Beispiel ( $\omega = 4$ ,  $n = 10$ ) scheinen Druckfehler, die sich auch sonst eingeschlichen haben, das Ergebnis verzerrt zu haben. Volk (Würzburg).

**Shanker, Hari:** An integral equation for Whittaker's confluent hypergeometric function. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 482—483 (1949).

Verf. zeigt, daß die Funktion  $\varphi(z) = z^{-1} W_{k,m}(z)$  der Integralgleichung

$$(1) \quad \varphi(p) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + v)}{\Gamma(v - m) \Gamma(v + m)} \int_0^\infty (p+t)^{-\frac{1}{2}-v} (tp)^{v-\frac{1}{2}} W_{k,m}(p+t) \varphi(t) dt$$

genügt, wenn  $\operatorname{Re}(v \pm m) > 0$ . Eine früher von J. L. Sharma für dieselbe Funktion angegebene Integralgleichung [J. London math. Soc. **13**, 117—119 (1938); dies. Zbl. **18**, 304] ist ein Sonderfall von (1), der sich für  $v = 1/2 - k$  ergibt.

L. Koschmieder (Tucumán).

**McLachlan, N. W.:** Mathieu functions of fractional order. J. Math. Phys., Massachusetts **26**, 29—41 (1947).

Die Lösungen der Differentialgleichung  $d^2y/dz^2 + (a \mp 2q \cos 2z) y = 0$  ( $a, q = \text{reell}$ ) werden für den Fall untersucht und klassifiziert, in welchem der Punkt  $a, q$  in einem stabilen Gebiet der Stabilitätskarte liegt. So werden Lösungen in stabilen Gebieten mit gerader Nummer  $2n$  durch

$$\begin{aligned} \operatorname{ce}_{2n+\beta}(z, q) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_{2r}^{(2n+\beta)} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (2r + \beta) z \\ \operatorname{se}_{2n+\beta}(z, q) & \end{aligned}$$

definiert; sie gehören zum Wert  $a_{2n+\beta}$  des Parameters  $a$ . Sind  $n$  und  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) vorgegeben, so bestimmen sich  $a_{2n+\beta}$  und die Koeffizienten  $A_{2r}^{(2n+\beta)}$  aus einem dreigliedrigen Rekursionssystem für diese Koeffizienten. Für diese Funktionen werden Reihen nach Produkten von Besselschen Funktionen mit den Argumenten  $ke^{iz}$  und  $ke^{-iz}$  ( $k^2 = q$ ) und Reihen nach Besselschen Funktionen mit dem Argument  $2k \cos z$  hergeleitet. Ferner werden asymptotische Entwicklungen sowohl für große  $|\operatorname{Im} z|$  wie für große positive  $q$  angegeben. Schließlich werden Verallgemeinerungen der für ganzperiodische Funktionen bekannten Integralgleichungen mit Kernen wie z. B.  $\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (2k \cos z \cos u)$  aufgestellt. — Ein großer Teil der aufgeführten Beziehungen für diese Mathieuschen Funktionen gebrochener Ordnung findet sich auch in der Arbeit des Verf., „Mathieu functions and their classification“, J. Math. Phys., Massachusetts **25**, 209—240 (1946) und in seinem Buch „Theory and application of Mathieu functions“ (dies. Zbl. **29**, 29).

J. Meixner (Aachen).



## Funktionentheorie:

●Fuks, B. A. u. B. V. Šabat: **Funktionen einer komplexen Veränderlichen und einige ihrer Anwendungen.** (Phys.-math. Bibliothek d. Ingenieurs.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag f. techn.-theor. Lit. 1949. 383 S., R. 15,65 [Russisch].

Verff. haben mit Geschick eine Auswahl getroffen, welche ebenso den notwendigen theoretischen Grundgedanken gerecht wird, wie sie die Hauptpunkte der Anwendung der Funktionentheorie im Bereich der ebenen Felder sorgfältig beachtet. Einzelne Beweise sind unterdrückt; aber durch Skizzen und gute Beispiele einerseits, durch sorgliche Formulierung der Behauptungen andererseits, wird das volle Verständnis gesichert. Besonderes Gewicht ist darauf gelegt, die Fertigkeit im Rechnen, und die Beherrschung des funktionentheoretischen Apparats zu steigern. Das Buch enthält eine Reihe von schönen Einzelheiten und Aufgaben, die wir ausdrücklich begrüßen. Es zeugt davon, daß erhebliche Anforderungen an die Ingenieurstudenten gestellt werden. — Inhalt: Grundbegriffe; konforme Abbildung; elementare Funktionen; Anwendung auf die Theorie ebener Felder; Integraldarstellung regulärer (und harmonischer) Funktionen; Reihendarstellung; Anwendungen der Residuentheorie; konforme Abbildung von geradlinigen Vielecken. *Ullrich.*

Goodstein, R. L.: **A necessary and sufficient condition for differentiability.** Edinburgh math. Notes **37**, 13—16 (1949).

Zerfällt das Quadrat  $S$  für jedes  $\varepsilon > 0$  in eine endliche Anzahl von Teilquadraten  $s_r$  mit Seitenlängen  $\delta_r$ , und gehört zu jedem  $s_r$  eine Zahl  $A_r$ , so daß für eine in  $S$  definierte Funktion  $f(z)$  und jedes  $r$

$$|f(z) - f(z') - A_r(z - z')| < \varepsilon \delta_r$$

gilt, sobald  $z$  und  $z'$  im abgeschlossenen  $s_r$  liegen, dann ist  $f(z)$  im Inneren von  $S$  reguläranalytisch. Umgekehrt zieht die Differenzierbarkeit von  $f(z)$  im geschlossenen  $S$  Ungleichungen obiger Art nach sich. Der Beweis fußt auf dem Satz von Morera. Weiter wird bewiesen, daß  $f(z)$  konstant in  $S$  ausfällt, falls für jedes  $z_0$  in  $S$  und jedes  $\varepsilon > 0$

$$|f(z) - f(z_0) - A(\varepsilon, z_0)(z - z_0)^{p(z_0)}| < \varepsilon \delta(\varepsilon, z_0),$$

sobald  $z$  im Durchschnitt von  $S$  und dem Kreis  $|z - z_0| \leq \delta(\varepsilon, z_0)$  liegt, und wenn außerdem  $\delta(\varepsilon, z_0)$  für alle  $z_0$  in  $S$  und alle  $\varepsilon > 0$  eine obere Schranke hat.

*G. af Hällström (Åbo).*

Brödel, Walter: **Über die Nullstellen der Weierstrassschen  $\wp$ -Funktion.** J. reine angew. Math., Berlin **187**, 189—192 (1950).

Beweis folgender Vermutung von Hasse: Bei jeder, den Bedingungen  $0 \leq \vartheta < 1$ ,  $0 \leq \vartheta' < 1$ ,  $\vartheta^2 + \vartheta'^2 \neq 0$  genügenden Wahl der reellen Zahlen  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  kann das Periodenverhältnis  $\omega' : \omega = \tau$  so gewählt werden, daß  $u = \vartheta \cdot 2\omega + \vartheta' \cdot 2\omega'$  eine Nullstelle der  $\wp$ -Funktion ist (die zweite wird dann durch  $1 - \vartheta$ ,  $1 - \vartheta'$  geliefert). Sind  $v_n(\tau)$  die zu einem Wert von  $\tau$  gehörenden Nullstellen von  $\wp(u(\frac{1}{2}, \tau/2))$ , so ergeben sich die  $v_n(\tau)$  als im kleinen analytisch und, wie Verf. (weil er es nicht braucht, ohne Beweis) erwähnt, als Zweige einer einzigen analytischen Funktion  $v(\tau)$ . Aus  $v(\tau)$  lassen sich  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  als reelle, bis auf Ausnahmestellen analytische Funktionen von  $\tau$  berechnen. Durch ein genaueres Studium der dadurch geleisteten Abbildung der  $\tau$ -Ebene auf eine  $\vartheta$ -Ebene kommt Verf. zum Beweis der Vermutung. *Lochs (Innsbruck).*

Bagehi, Haridas and Phatik Chand Chatterji: **Note on a functional equation connected with the Weierstrassian function  $\wp(z)$ .** Bull. Calcutta math. Soc. **42**, 49—52 (1950).

Ist  $h = 1, 2, 3$ ;  $\sum_{h=1}^3 x_h = 0$ ;  $x_h - y_h = \varepsilon$ ;  $|\varepsilon| < 1$  und fragt man nach der

Menge der meromorphen Lösungen zur funktionalen Ungleichung

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ f(y_1) & f(y_2) & f(y_3) \\ x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & x_3 - y_3 \end{vmatrix} = O(\varepsilon^3) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

so bleibt nur die dreifach unendliche Lösungsschaar  $f(x) = c \wp(x; g_2, g_3)$ . Gleichwertig mit (1) ist die von den Verf. bevorzugte asymmetrische Funktionalgleichung

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(x+y) \\ f'(x) & f'(y) & -f'(x+y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

deren Auflösung mit Hilfsmitteln Weierstraßens durchgeführt wird. *Wilh. Maier.*

**Pólya, G.: Remarks on power series.** Acta Sci. math., Szeged **12 B**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 199—203 (1950).

Die vorliegende Arbeit behandelt drei verschiedenartige Sätze über Potenzreihen. — 1. Es sei  $f(z) = e^{-cz} f_1(z)$ , wo  $c \geq 0$  und  $f_1(z)$  eine ganze Funktion vom Geschlecht 0 mit nur positiven Nullstellen ist; weiter sei  $\gamma$  die erste Nullstelle von  $f(z)$ , und  $-z f'(z)/f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n$ ,  $1/f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$  gesetzt. Dann ist

$$t_0/t_1 \leq t_1/t_2 \leq t_2/t_3 \leq \dots \leq \gamma \leq \dots \leq s_2/s_3 \leq s_1/s_2$$

(und bekanntlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n/t_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n/s_{n+1} = \gamma).$$

Der Beweis des auf die  $s_n$  bezüglichen Teiles ergibt sich aus einer bekannten Ungleichung [vgl. G. H. Hardy, J. E. Littlewood und G. Pólya, Inequalities, Cambridge (1934), Seite 28, Satz 18; dies. Zbl. **10**, 107]. Der Beweis des auf die  $t_n$  bezüglichen Teiles ergibt sich durch Approximation der Funktion  $f(z)/(z-\gamma)$  durch Polynome mit nur positiven Nullstellen. [Die Funktion  $f(z)$  des Satzes ist die allgemeinste Funktion, die sich als Grenzwert von Polynomen mit nur positiven Nullstellen darstellen läßt; vgl. dazu Verf., Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln, Rend. Circ. mat. Palermo **36**, 279—295 (1913). Verf. weist darauf hin, daß der Satz auch aus einem allgemeineren, ihm von I. J. Schoenberg mitgeteilten Satze folgt.] — 2. Aus einem Satz von H. Grönwall [Sur les fonctions qui ne satisfont à aucune équation différentielle algébrique, Öfversigt Kongl. Vet.-Akad. Förhandl., Stockholm 1898, 387—395] leitet Verf. das folgende Ergebnis

ab: Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe mit nicht verschwindendem Konvergenzradius und kein Polynom; dann gibt es eine Folge  $\varepsilon_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) mit  $\varepsilon_n = +1$  oder  $\varepsilon_n = -1$ , so daß die Funktion  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n z^n$  keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. — 3. Es sei  $q$  eine festgehaltene positive ganze,  $k$  eine ganze Zahl.

Ist die Folge  $a_\mu$  für  $\mu \geq k$  gegeben, so wird  $w = \sum_{\mu=k}^{\infty} a_\mu z^{\mu/q}$  als formale Potenzreihe bezeichnet. (Dabei darf  $k$  von Reihe zu Reihe andere Werte annehmen.) Formale Gleichheit, Addition und Multiplikation formaler Potenzreihen werden nun wie bei konvergenten Potenzreihen erklärt. Dann gilt: Eine formale Potenzreihe  $w$ , welche formal einer algebraischen Gleichung  $P(z, w) = 0$  genügt, besitzt notwendig einen nicht verschwindenden Konvergenzradius. Beim Beweis wird benutzt, daß die formalen Potenzreihen einen nullteilerfreien Ring bilden; daraus wird geschlossen, daß  $w$  übereinstimmt mit der konvergenten Puiseuxschen Entwicklung einer der Wurzeln der algebraischen Gleichung in der Umgebung des Ursprungs. [Zu Sätzen dieser Art, mit einer algebraischen Differentialgleichung anstatt der algebraischen Gleichung, vgl. Verf., C. r. Acad. Sci., Paris **201**, 444—445 (1935); dies. Zbl. **12**, 76].

*Meyer-König* (Stuttgart).



**Džrbašjan, M. M.:** Über die Vollständigkeit gewisser Systeme analytischer Funktionen in unendlichen Bereichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 15—18 (1949) [Russisch].

Considérons dans le plan de  $z$  avec la coupure  $(-\infty, 0)$  le système des fonctions  $\{z^{\lambda_n}\}$ , où  $\lambda_n$  est une suite arbitraire de nombres réels et positifs, tels que

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq C > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Désignons par  $\Delta_\alpha$  l'angle d'ouverture  $\pi\alpha$  ( $0 < \alpha < 2$ ) dans le plan de  $z$ , coupé suivant le demi-axe réel  $(-\infty, 0)$  et par  $H_2(e^{-\mu r^p})$  la classe de fonctions  $f(z)$ , holomorphes dans  $\Delta_\alpha$  pour lesquelles il existe l'intégrale

$$\iint_{\Delta_\alpha} e^{-\mu r^p} |f(z)|^2 dx dy, \quad r = |z|, \quad \mu > 0, \quad p > 0.$$

L'A. annonce le théorème suivant: Pour que le système  $\{z^{\lambda_n}\}$  soit complet dans la classe  $H_2(e^{-\mu r^p})$  dans le sens  $\inf_{\{Q_\lambda\}} \iint_{\Delta_\alpha} e^{-\mu r^p} |f(z) - Q_\lambda(z)|^2 dx dy = 0$ , où  $\{Q_\lambda\}$  — les

sommes possibles de la forme  $\sum_{\lambda_n < r}^n a_k z^{\lambda_k}$  il suffit et en général il faut que la fonction de la suite  $\{\lambda_n\}$ ,  $\psi(r) = \exp \left\{ 2 \sum_{\lambda_n < r}^n \lambda_n^{-1} \right\}$  satisfasse à la condition suivante: il existe

une fonction non décroissante  $h(r)$  telle, que  $\int r^{-2} h^p(r) dr = +\infty$  et  $h(r) \leq A r^{-\alpha} \psi(r)$  pour  $r \geq r_0$  ( $A > 0$ ). N. Obrechhoff (Sofia).

**Džrbašjan, M. M.:** Über die Vollständigkeit eines Orthogonalsystems ganzer periodischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 429—432 (1950) [Russisch].

Désignons par  $H_2(e^{-2\sigma r^2})$ ,  $\sigma > 0$ , la classe de fonctions entières  $f(z)$ , pour lesquelles il existe l'intégrale  $\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} |f(r e^{i\theta})|^2 dr d\theta$ , et par  $L_n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

les fonctions  $L_n(z) = \frac{2\sigma}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2\pi i k \omega} - e^{k\pi i 2\sigma \omega^2})$ . L'A. démontre que le système de

fonctions  $\Phi_0(z) = \left\lfloor \frac{\sqrt{2\sigma}}{\pi} \right\rfloor$ ,  $\Phi_n(z) = L_n(z) \left\lfloor \sqrt{L_n \left( \frac{\pi}{2\sigma \omega} n \right)} \right\rfloor$  est orthogonal et normal relativement le poid  $e^{-2\sigma r^2}$  dans tout le plan et que chaque fonction entière  $f(z)$  périodique de période  $2\omega i$  ( $\omega > 0$ ), qui appartient à la classe  $H_2(e^{-2\sigma r^2})$  peut être développée en série suivant les fonctions  $\Phi_n(z)$ , uniformément convergente dans chaque domaine fini du plan. N. Obrechhoff (Sofia).

**Macintyre, A. J. and W. W. Rogosinski:** Extremum problems in the theory of analytic functions. Acta math., København 82, 275—325 (1950).

Soit  $H_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) la classe des fonctions  $f(z)$  holomorphes dans  $|z| < 1$  et telles que  $M_p(f, r) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}$  soit borné pour  $0 \leq r < 1$ ; on pose  $M_p(f) = \lim_{r \rightarrow 1} M_p(f, r)$ . Soit  $\mathfrak{H}_q$  la classe des fonctions  $k(z)$  méromorphes dans  $|z| < 1$ ,

$y$  présentant un nombre fini de pôles et telles que  $M_q(k, r)$  soit borné pour  $r_0 \leq r < 1$ . On suppose  $1/p + 1/q = 1$  (classes conjuguées). — Les A. montrent l'équivalence des trois problèmes suivants: 1° trouver le maximum du module de

$\int_{|z|=1} f(\zeta) k(\zeta) d\zeta$  pour toutes les fonctions  $f$  appartenant à  $H_p$  lorsque sont fixés  $M_p(f)$  et  $k \in \mathfrak{H}_q$ ; 2° trouver le minimum de  $M_q(g)$ , la fonction  $g \in H_q$  prenant des valeurs données en  $n$  points donnés du cercle unité; 3° trouver une fonction  $H(z)$  de la forme

$$H(z) \equiv A \prod_{i=1}^n \frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z} \prod (1 - \bar{\alpha}_i z)^{2/q}$$

prenant des valeurs données en  $n$  points donnés du cercle unité (les  $n-1$  constantes  $\alpha_i$  satisfont à  $|\alpha_i| \leq 1$ , le second produit est étendu à tous les  $\alpha_i$ , le premier

à un nombre quelconque d'entre eux). Le 3<sup>e</sup> problème se résout pour  $q = 2$  par la formule d'interpolation de Lagrange, pour  $q = \infty$  par la méthode de Schur. Pour  $q=1$ , Kakeya a montré qu'il présentait une solution et une seule; sa méthode (non constructive) s'étend aux cas  $q < \infty$ . Il en résulte que le 2<sup>e</sup> problème présente une fonction extrémale et une seule et que, pour  $p > 1$ , le 1<sup>er</sup> problème présente une fonction extrémale définie à un facteur constant de module 1 près. — Dans une seconde partie du Mémoire, les A. donnent des applications; ils obtiennent de nombreuses inégalités fournissant, entre autres, des bornes sup. de  $|f^{(n)}(\beta)|$  en fonction de  $n$ , de  $\beta$  et de  $M_p(f)$ . Ils traitent enfin dans des cas très particuliers une généralisation du 1<sup>er</sup> problème dans laquelle  $f$  est assujettie, en plus, à prendre des valeurs données en  $n$  points donnés du cercle unité. *Dufresnoy* (Bordeaux).

**Štejnberg, N. S.:** Über die Newtonsche Interpolation für ganze Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **71**, 21—22 (1950) [Russisch].

L'A. complète les résultats de I. I. Ibragimov et M. B. Keldysch [Mat. Sbornik, n. S. **20**, 283—291 (1947)]. *N. Obrechhoff* (Sofia).

**Boas jr., R. P., R. C. Buck and P. Erdős:** The set on which an entire function is small. Amer. J. Math. **70**, 400—402 (1948).

Es sei  $f(z)$  eine ganze Funktion,  $M(r) = \max_{(\varphi)} |f(re^{i\varphi})|$ ,  $\lambda > 1$ ,  $m_\lambda(r)$  das Flächenmaß der Menge  $(|z| \leq r, \log |f(z)| \leq (1-\lambda) \log M(r))$ ,

$$\bar{D}(\lambda) = \limsup_{r \rightarrow \infty} m_\lambda(r)/\pi r^2 \quad \text{und} \quad \underline{D}(\lambda) = \liminf_{r \rightarrow \infty} m_\lambda(r)/\pi r^2.$$

Mit einfachen Mitteln, die sich nur auf den subharmonischen Charakter von  $\log |f(z)|$  stützen, gewinnen die Verff. folgende 2 Resultate: 1. Es gibt eine nur von  $\lambda$  abhängige Konstante  $K$ , so daß  $\bar{D}(\lambda) \leq K$  für alle  $f$ ; dabei ist  $0 < K \leq \lambda^{-1}$ . 2. Es ist  $\underline{D}(\lambda) = o(\lambda^{-1})$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ . *Pfluger* (Zürich).

**Yu, Chia-Yung:** Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1833—1835 (1949).

Die vorliegende Note befaßt sich mit den horizontalen Borelschen Richtungen (bezüglich einer linearen Ordnung) von ganzen Funktionen (vgl. hierzu auch die frühere Note des Verf., dies. Zbl. **33**, 367). Für fast alle Folgen  $\{\varepsilon_n\}$ ,  $|\varepsilon_n| = 1$ , hat die Funktion  $\sum_1^\infty a_n \varepsilon_n e^{i n z}$  in jedem horizontalen Parallelstreifen von bestimmter fester Breite mindestens eine Borelsche Richtung. Man kann auch die Borelschen Richtungen von  $F = \sum_1^\infty a_n e^{i n z}$  mit denen ihrer Cramerschen Transformaten  $G = \sum_1^\infty a_n \theta(\lambda_n) e^{i n z}$  vergleichen, und diese stehen wiederum im Zusammenhang mit den Singularitäten gewisser zugeordneter Funktionen  $f$  und  $g$ . Die Methoden sind auch auf gewisse ganze Funktionen der Form  $\int_0^\infty e^{zt} dx(t)$  anwendbar und auf Dirichletsche Reihen mit komplexen  $\lambda_n$ . *Pfluger* (Zürich).

**Thron, W. J.:** Singular points of functions defined by  $C$ -fractions. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 51—54 (1950).

This paper extends the theorems of Scott and Wall [Ann. Math., Princeton, II. S. **41**, 328—349 (1940); this Zbl. **24**, 216] concerning the convergence of the  $C$ -fraction  $1 + K_{n=1}^\infty (d_n x^{\alpha_n}/1)$ , where the  $\alpha_n$  are positive integers and the  $d_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ , to a somewhat larger class of continued fractions of this form. Is it shown that if  $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$  for all  $n \geq 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n|^{1/\alpha_n} = 1$ , then the meromorphic function  $f(x)$  to which the  $C$ -fraction converges for  $|x| < 1$  has at least one singular point (not a pole) on the circle  $|x| = 1$ . Consequently,  $f(x)$  has the circle



$|x| = 1$  as a natural boundary provided there exists a sequence of positive integers  $\{\mu_k\}$  with  $\lim \mu_k = \infty$  with the property that for every  $k$  there exists an  $n(k)$  such that  $\mu_k$  divides  $\alpha_n$  for all  $n > n(k)$ . E. Frank (Chicago).

●Carleson, Lennart: On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets. (Diss.) Uppsala: Appelbergs Boktryckeri AB. 1950. 79 S.

Unter den im Einheitskreis analytischen Funktionen  $w(z)$  zeichnen sich bekanntlich die beschränktartigen durch eine Reihe von besonderen Eigenschaften aus. Diese Klasse wird dadurch definiert, daß die Nevanlinnasche Charakteristik

$$T(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^r A(t)/t dt$$
 für  $r \rightarrow 1$  beschränkt bleibt. Hier bedeutet  $A(r)$  den Kugelinhalt der Bildfläche von  $|z| < r$ . Innerhalb dieser Funktionsklasse macht Verf. nun eine verfeinerte Einteilung, indem er das Beschränktheitskriterium 
$$\int_0^1 A(r) dr < \infty$$
 durch ein allgemeineres 
$$\int_0^1 A(r) (1-r)^{-\alpha} dr < \infty$$
 mit  $0 \leq \alpha < 1$

ersetzt, und zwar gehöre  $w(z)$  der Klasse  $T_\alpha$  an, wenn diese Ungleichung gilt. Ist  $A(r)$  sogar beschränkt, gehört  $w(z)$  zur Klasse  $T_1$ . Zweck der Abhandlung ist die für die Beschränktheitsklasse,  $T_0$ , bekannten Aussagen zu verschärfen, wenn  $w(z)$  einem  $T_\alpha$  mit  $\alpha > 0$  angehört. — Verf. operiert mit Hausdorffschen Maßbestimmungen und verallgemeinerten Kapazitätsbegriffen. Die letztgenannten spielen eine Rolle bei Charakterisierung der Divergenzpunktmengen von Fourierreihen, und auf dem Wege gelangt Verf. zu Aussagen über die radialen Grenzwerte von  $w(z)$ . Sowohl die Punktmengen auf  $|z| = 1$ , wo kein radialer Grenzwert existiert, als auch diejenigen, wo dieser Grenzwert gleich irgendeiner Zahl  $a$  ausfällt, lassen sich durch verschwindende, von  $\alpha$  abhängige verallgemeinerte Kapazität charakterisieren (wo nur  $a$  nicht einer gewissen Nullmenge angehört). Jede  $T_0$ -Funktion läßt sich bekanntlich als Quotient beschränkter Funktionen schreiben. Diese können nun im Falle  $\alpha > 0$  so gewählt werden, daß ihre Taylorkoeffizienten besondere Bedingungen erfüllen. Für Blaschkeprodukte empfiehlt sich eine spezielle Klasseneinteilung, indem das Produkt der Klasse  $B_\alpha$  angehört, wenn die über seine Nullstellenmodul  $r_v$  erstreckte Summe  $\sum (1-r_v)^{1-\alpha}$  konvergiert. Es zeigt sich dann u. a., daß ein zu  $B_\alpha$  gehöriges Blaschkeprodukt auch  $T_\alpha$  angehört. — Verf. untersucht schließlich solche  $w(z)$ , die den Einheitskreis auf eine universelle Überlagerungsfläche abbilden. Von früher her war bekannt, daß  $w(z)$  dann und nur dann  $T_0$  angehört, wenn die Fläche über einem Grundgebiet ausgebreitet ist, dessen Komplementärmenge  $F$  von positivem harmonischen Maß ist. Es gelingt nun Verf., eine genauere Aussage über die Mächtigkeit von  $F$  zu formulieren, falls  $w(z)$  zu  $T_\alpha$  gehört und  $1/2 < \alpha < 1$  ist. Schon für  $\alpha = 1/2$  ist dabei  $F$  perfekt, während für alle  $\alpha < 1/2$  sich Fälle konstruieren lassen, wo  $F$  eine unendliche Menge isolierter Punkte enthält. Auch hier wird die Summe  $\sum (1-r_v)^{1-\alpha}$  herangezogen, wobei  $r_v$  jetzt Nullstellenmodul von  $w(z) - a$  ist. Sie konvergiert für jedes  $a$ , wenn  $w$  zu  $T_\alpha$  gehört; und wenn sie umgekehrt für ein positives  $\alpha < 1/2$  und für irgendein  $a$  aus der Wertmenge von  $w$  konvergiert und wenn ferner  $F$  innere Punkte enthält, so gehört  $w$  zu  $T_\beta$ , sobald  $\beta < \alpha$  ist. G. af Hällström (Åbo).

Ahlfors, Lars and Maurice Heins: Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 341—346 (1949).

In den bisherigen Untersuchungen zum Phragmén-Lindelöfschen Prinzip hat es sich um das Verhalten gewisser Mittelwerte oder Maxima auf Halbkreisen mit unbeschränkt wachsendem Radius und insbesondere um die Existenz gewisser mit jenen zusammenhängender Grenzwerte gehandelt. Hier wird das Verhalten der Funktion selbst auf Radien betrachtet und die Existenz entsprechender Grenzwerte unter gewissen grundsätzlich unvermeidlichen Ausnahmen gezeigt. Dabei ist der Begriff der Phragmén-Lindelöfschen Ausnahmemenge wichtig; das ist, grob gesagt,

eine Menge, auf der eine Voraussetzung, wie sie im Phragmén-Lindelöfschen Prinzip betreffend das Verhalten bei unendlich gemacht wird, möglich ist, ohne daß eine Folgerung gezogen werden könnte, wie in einer der verschiedenen Formen des Prinzips.

Grunsky (Tübingen).

Grunsky, H.: Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. III. Ein Einzigkeitssatz. Math. Z., Berlin 51, 586—615 (1949).

Grunsky, Helmut: Nachtrag zu meinen Arbeiten über „Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten“. Math. Z., Berlin 52, 852 (1950).

Vgl. dies. Zbl. 24, 222 und 28, 405 für Teil I und II der Arbeit, sowie im Zusammenhang damit auch 26, 220. — Im Teil I wurde zunächst Satz I wie folgt ausgesprochen und dann — ohne Nachweis der Einzigkeit — zu verschiedenen Folgerungen herangezogen: Sei  $G_{n+1}$  ein  $(n+1)$ -fach zusammenhängendes Gebiet ohne punktförmige Randkomponenten;  $f(z)$  durchlaufe die Klasse aller Funktionen, welche in  $G_{n+1}$  eindeutig, regulär und gleichmäßig beschränkt sind, sowie in einem festgehaltenen inneren Punkte — etwa 0 genannt — verschwinden; dann gibt es — nach Vorgabe eines weiteren festen Innenpunktes  $z^* \in G_{n+1}$  in dieser Klasse eine und nur eine Funktion  $f^*$ , welche  $|f(z^*)|$  zum Maximum macht; für jede andere Klassenfunktion ist  $|f(z^*)| < |f^*(z^*)|$ . Darin ist eine Erweiterung des Schwarzschen Lemmas bei einfach zusammenhängenden Gebieten zu erblicken; weitere Sätze in Teil I, II entsprechen dann den bekannten Folgerungen und Seitenstücken des Schwarzschen Lemmas. — Die ganze Reihe von Arbeiten blieb aber bislang dadurch noch offen, daß der Beweis der erwarteten Einzigkeitsaussage zunächst nicht voll zu gelingen schien. Wie sich jetzt (vgl. Nachtrag) herausstellt, lag das daran, daß er für zu schwer gehalten worden war; das schwere Geschütz, das in Teil III zu diesem Beweise herangezogen wurde (Kroneckers Formel zur Verknüpfung für die Anzahlen der relativen Maxima, Minima, Sattelwerte mit dem Geschlecht; Bestimmung der Gesamtzahl der stationären Stellen mittels der Euler-Lagrangeschen Multiplikatorenregel) erfordert die zusätzliche Annahme höchstens dreifachen Zusammenhangs. In einem äußerst einfachen Schluß (Nachtrag) gelingt nun der Einzigkeitsnachweis ohne solche Einschränkung: Gäbe es zwei Extremalfunktionen, in der Klasse, so wäre auch ihr arithmetisches Mittel eine solche; das führt rasch zum Ziel. Die Bemerkung ist in einem ähnlichen Falle von Heins benutzt worden [Trans. Amer. math. Soc. 55, 354 (1944)]. Damit ist die ganze Reihe von Untersuchungen des Verf. abgerundet. — Wohl mit gutem Recht bemerkt Verf., daß seine Betrachtungen in Teil III zwar zum Einzigkeitsnachweis nicht erforderlich seien, aber doch in anderer Richtung tiefere Einblicke in die Topologie seiner Funktionsklasse erwarten lassen.

Egon Ullrich (Gießen).

Rényi, Alfred: On the geometry of conformal mapping. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 215—222 (1950).

Verf. beschäftigt sich in dieser Arbeit mit der Gestalt der Bildkurven  $C(r)$  von  $|z| = r < 1$  bei schlichter Abbildung  $w = f(z) = z + a_1 z^1 + \dots$  von  $|z| < 1$ , insbesondere mit ihrer Annäherung an die Kreisgestalt mit  $r \rightarrow 0$ . Ist  $\gamma = \gamma(r, \varphi)$  die Krümmung von  $C(r)$  im Bilde von  $z = r e^{i\varphi}$ ,  $\delta(r) = \int_{C(r)} |d\gamma|$ , so kann  $\delta(r)$  als Maß für die Abweichungen der Kreisgestalt dienen. Verf. findet:

$$\delta(r) < \frac{12\pi r(1+r)}{(1-r)^3}.$$

Für die Länge  $L(r)$  von  $C(r)$  erhält er  $L(r) = 2\pi r + O(r^3)$  (der Verzerrungssatz liefert trivialerweise nur  $2\pi r + O(r^2)$ ). Aus beiden Ergebnissen folgen Sätze über die Krümmung von  $C(r)$  und die Radien des Um- und Inkreises von  $C(r)$ . — Ein zweiter Teil enthält Ansätze zu einer Untersuchung von  $C(r)$ , wenn  $r_c < r < r_s$ , wo  $r_c$  die Konvexitäts-,  $r_s$  die Sternschränke für schlichte Abbildung bedeuten.

Grunsky (Tübingen).



Mullender, P.: Über schlichte konforme Abbildungen. Simon Stevin, wis. natuirk. Tijdschr. 26, 136—142 (1949) [Holländisch].

R. Remak [Mathematica, Zutphen, B 11, 175—192; 12, 43—49 (1943); dies. Zbl. 28, 151] hat gezeigt:  $w(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  gehört genau dann zur „Hurwitzschen Klasse“, wenn  $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \leq 1$ . Ist weiter  $w'(1) = 0$ , so  $a_n \leq 0$  und  $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| = 1$ .

Bricht eine solche Reihe ab, so hat das Bild  $B$  von  $|z| = 1$  in  $w(1)$  eine Spitze. Es gibt nicht-abbrechende Reihen, so daß in  $w(1)$  keine solche Spitze auftritt. — Verf. gibt eine Klasse nicht-abbrechender Reihen des obigen Typus an, für die  $B$  in  $w(1)$  eine derartige Spitze besitzt. Daß dies nicht für alle Reihen zutrifft, wird von neuem durch ein einfaches Beispiel belegt.

Rothstein (Würzburg).

Jenkins, J. A.: Some problems in conformal mapping. Trans. Amer. math. Soc. 67, 327—350 (1949).

Verf. untersucht für „Fünf-Ecke“, „Sechs-Ecke“ und dreifach zusammenhängende Gebiete die konforme Äquivalenz und verwandte Fragen. Die eingeführten Größen verallgemeinern den Begriff der Extremallänge, die von Ahlfors und Beurling (dies. Zbl. 30, 356) für ähnliche Zwecke verwendet wurde. — Einem „Fünf-Eck“  $D(1, 2, 3, 4, 5)$ , d. i. ein einfachzusammenhängendes Gebiet  $D$  mit den „Ecken“ 1, 2, 3, 4, 5, wird eine Funktion  $M(a_1, a_2)$  der positiven Variablen  $a_1$  und  $a_2$  als „Modul“ zugeordnet. Die Klasse  $(\gamma_1)$  besteht aus den Kurven, welche innerhalb  $D$  die Seiten 12 und 45 verbinden, jene der Klasse  $(\gamma_2)$  verbinden die Seiten 12 und 34. Für  $\varrho(z) \geq 0$  unter den Nebenbedingungen  $\int_{\gamma_1} \varrho |dz| \geq a_1$  und

$\int_{\gamma_2} \varrho |dz| \geq a_2$  ist  $\iint_D \varrho^2 dx dy$  zu einem Minimum zu machen. Dieses Minimum ist der Modul  $M(a_1, a_2)$ . Es werden die zugehörigen Normalgebiete ( $\varrho \equiv 1$ ) diskutiert und folgender Satz bewiesen: Ein Fünf-Eck  $D'(1', 2', 3', 4', 5')$  kann dann und nur dann in  $D(1, 2, 3, 4, 5)$  konform abgebildet werden, so daß 4' in 4 und die Seiten 1' 2', 3' 4', 4' 5' in Teilstücke der Seiten 12, 34, 45 übergehen, wenn

$$M(a_1, a_2) \geq M'(a_1, a_2)$$

ist für alle  $a_1, a_2$ ; die beiden sind dann und nur dann konform äquivalent, wenn  $M \equiv M'$  ist. Analoge Resultate ergeben sich für das Sechs-Eck und dreifach zusammenhängende Gebiete, deren Moduln von drei Variablen abhängig sind.

Pfluger (Zürich).

Andreotti, Aldo: Un'applicazione di un teorema di Cechioni ad un problema di rappresentazione conforme. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 2, 99—103 (1950).

Es sei  $D$  ein Riemannsches Flächenstück von beliebigem endlichen Geschlecht und endlich vielen Randkurven. Verf. beweist, daß  $D$  so auf eine Überlagerungsfläche der  $z$ -Ebene konform abgebildet werden kann, daß die Randkurven in (ein- oder mehrfache) konzentrische Kreisperipherien übergehen.

Pfluger (Zürich).

Hornich, Hans: Beschränkte Integrale auf speziellen transzendenten Riemannschen Flächen. Mh. Math., Wien 53, 187—201 (1949).

$F$  sei eine 2-blättrige Riemannsche Fläche mit den reellen Verzweigungspunkten  $\alpha_n$ ,  $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ ,  $\alpha_n \rightarrow \infty$ . Die beiden Blätter seien längs der Intervalle  $(\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  verheftet. Die  $A$ -Schnitte  $A_n$  sind Rückkehrschnitte um die Intervalle  $(\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1})$ , die  $B$ -Schnitte  $B_n$  solche um die Intervalle  $(\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n})$ ,  $\alpha_{-1} = -\infty$ . Die von  $\alpha_0$  bis  $+\infty$  längs der reellen Achse aufgeschnittene Fläche wird mit  $F$  bezeichnet. — Unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Verteilung der  $\alpha_n$  beweist Verf. die Existenz von Integralen  $v_{mn}$ , die auf  $F$  be-

schränkt sind und deren  $A$ -Perioden in folgender Weise normiert sind

$$\int_{A_k} dv_{mn} = \begin{cases} 1 & (k = m) \\ -1 & (k = n) \\ 0 & (k \neq m, n). \end{cases}$$

Die auf  $F$  beschränkten Integrale  $u$  lassen sich mit Hilfe der  $v_{mn}$  durch konvergente Reihen darstellen:  $u = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n v_{n-1,n}$ ,  $\sigma_n$  = Summe der  $n$  ersten  $A$ -Perioden von  $u$ .

Die Klasse der beschränkten Integrale läßt sich durch die  $\sigma_n$  vollständig charakterisieren. *Pfluger (Zürich).*

**Hornich, Hans:** Beschränkte Integrale auf speziellen transcendenten Riemannschen Flächen. II. *Mh. Math. Wien* **54**, 37—44 (1950).

In der Weiterführung der ersten Mitteilung (s. vorsteh. Referat) werden hier die  $B$ -Perioden  $a_{mn} = \int_{B_m} dv_{n-1,n} = i \cdot h_{mn}$  der beschränkten Normalintegrale  $v_{n-1,n}$  näher untersucht. Die  $h_{mn}$  sind reell,  $h_{nn} > 0$  und  $h_{mn} < 0$  für  $m \neq n$ .

— Die Abschnitte der unendlichen Matrix  $\mathfrak{A} = (h_{mn})$  sind positiv definit.  $\mathfrak{A}$  ist, dann und nur dann beschränkt, wenn die Integrale  $v_{n-1,n}$  auf  $F$  gleichmäßig beschränkt sind. Ist  $\mathfrak{A}$  beschränkt,  $v = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n v_{n-1,n}$  ein beschränktes Integral mit endlichem

$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sigma_n$ , so ist ihr Dirichlet-Integral über  $F$  in der Form  $D(v) = \sum_{m,n=1}^{\infty} h_{mn} \sigma_m \sigma_n$  darstellbar und endlich. Verf. gibt ein Beispiel an für ein beschränktes Integral mit unendlichem Dirichlet-Integral. *Pfluger (Zürich).*

**Parreau, Michel:** Comportement à la frontière de la fonction de Green d'une surface de Riemann. *C. r. Acad. Sci., Paris* **230**, 709—711 (1950).

Es werden einige Sätze über das Verhalten der Greenschen Funktion auf einer Riemannschen Fläche in der Umgebung ihres idealen Randes mitgeteilt. Sie folgen alle aus der Tatsache, daß jener Teil des idealen Randes, wo  $g > 0$  ist, das harmonische Maß null hat [R. Nevanlinna, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* **1**, 181—193 (1939); dies. Zbl. **20**, 29]. *Pfluger (Zürich).*

**Nevanlinna, Rolf:** Über die Existenz von beschränkten Potentialfunktionen auf Flächen von unendlichem Geschlecht. *Math. Z., Berlin* **52**, 599—604 (1950).

Auf einer Riemannschen Fläche mit Nullrand gibt es keine nichtkonstante und beschränkte harmonische Funktion [R. Nevanlinna, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A, Nr. **1**, 1—34 (1941); dies. Zbl. **24**, 421], hat die Fläche dagegen einen positiven Rand, so existiert darauf eine solche harmonische Funktion, sofern die Fläche von endlichem Geschlecht ist, im allgemeinen jedoch ist deren Existenz nicht gesichert. Verf. gibt nun folgendes allgemeines Kriterium an: Falls die Fläche  $F$  einen positiven Rand hat und mit Querschnitten in zwei Teilflächen  $F'$  und  $F''$  zerlegt werden kann, deren ideale Randteile je positives harmonisches Maß haben, so existiert auf  $F$  eine nichtkonstante, eindeutige und beschränkte harmonische Funktion. Die Konstruktion erfolgt mit Hilfe eines alternierenden Verfahrens. *Pfluger (Zürich).*

● **Siegel, Carl L.:** Analytic functions of several complex variables. Lectures delivered at the Institute for Advanced Study during the Fall Term of 1948. Notes by P. T. Bateman. Princeton N. J.: Institute for Advanced Study 1949 XII, 200 p., mimeographed.

Die vorliegende Ausarbeitung ist nach einer Vorlesung hergestellt, die Verf. in den Jahren 1948—1949 am Institute for Advanced Study gehalten hat. Es wird ein systematischer Aufbau der Theorie der  $2n$ -fach periodischen und automorphen Funktionen von  $n$  komplexen Veränderlichen gegeben. Die Darstellung zeichnet sich durch besondere Klarheit und Geschlossenheit aus, sie enthält neue wesentliche



Gesichtspunkte und zahlreiche neue Ergebnisse. — Einleitend werden funktionentheoretische Grundlagen behandelt, insbesondere die Teilbarkeitstheorie der Potenzreihen und der Cousinsche Problemkreis. Der erste Hauptteil ist der Theorie der  $2n$ -fach periodischen meromorphen Funktionen von  $n$  komplexen Veränderlichen gewidmet. Ausgehend von der Darstellbarkeit meromorpher Funktionen durch Quotienten regulärer ganzer Funktionen wird gezeigt, daß für  $2n$ -fach periodische meromorphe Funktionen Zähler und Nenner dieser Quotienten als Jacobische Funktionen gewählt werden können. Daraus ergeben sich die Periodenrelationen als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Abelschen Funktionen. Sodann werden die Beziehungen hergeleitet zwischen den Körpern der Abelschen Funktionen und den zu algebraischen Mannigfaltigkeiten gehörenden Funktionenkörpern. Schließlich wird ein auf Lefschetz zurückgehender topologischer Beweis für das Bestehen der Periodenrelationen gegeben. — Der zweite Hauptteil behandelt die Theorie der automorphen Funktionen in beschränkten Gebieten  $D$  des Raumes mehrerer komplexer Veränderlichen. Nach Erörterung bekannter Eigenschaften diskontinuierlicher Gruppen werden insbesondere solche Gruppen  $\Gamma$  betrachtet, für welche die Gebiete  $D \pmod{\Gamma}$  kompakt sind, d. h. zu denen geschlossene Fundamentalbereiche gehören. Die Gebiete  $D$  sind dann Regularitätsgebiete, da sie von innen durch Polyederbereiche approximierbar sind. Mit Hilfe Poincaréscher Thetareihen wird die Existenz von  $n$  unabhängigen zugehörigen automorphen Funktionen nachgewiesen und sodann gezeigt, daß  $n + 1$  solcher Funktionen algebraisch abhängig sind. Nach diesen allgemeinen Untersuchungen wird die Theorie für spezielle Gebiete  $D$  weiter entwickelt. Verf. beschränkt sich auf die von É. Cartan angegebenen homogenen und symmetrischen Gebiete, für die (vor allem vom Verf.) eine Theorie der analytischen Automorphismen entwickelt wurde. Speziell wird die Modulgruppe  $p$ -ten Grades behandelt und ihr Fundamentalbereich konstruiert. — Inhalt: I. Divisibility of Power Series. — II. Cousin's Problems. — III. Two Lemmas. — IV. Periodic Functions. — V. Difference Equations. — VI. Period Relations. — VII. Theta Functions. — VIII. The Field of Abelian Functions. — IX. An excursion into Topology. — X. Automorphic Functions. — XI. Existence of Discontinuous Groups. — XII. The Modular Group of Degree  $p$ . Behnke.

●Bergmann, Stefan: Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques. (Mém. Sci. math. Nr. 106). Paris: Gauthier-Villars 1947. 61 p.

Verf. gibt eine einführende Gesamtdarstellung in die im wesentlichen von ihm selbst aufgebaute Theorie der orthogonalen analytischen Funktionen  $f(z_1, z_2)$ . Im ersten Kapitel werden die geometrischen Grundlagen dargestellt. In Kap. II werden vollständige Systeme von Orthogonalfunktionen behandelt, das Analogon zum Rieszfischerschen Satz bewiesen, die Kernfunktion konstruiert und spezielle Rungesche Entwicklungen besprochen. Das Kap. III bildet eine Vorbereitung für den 2. Band, indem es den vom Verf. aufgestellten Minimalproblemen für die im jeweils vorgegebenem Gebiete quadratintegrierbaren Funktionen gewidmet ist. Kap. IV führt die Bergmannsche Metrik ein, die in mancher Hinsicht handlicher als die Carathéodorysche ist. — Die Darstellung bekommt ihre besondere Note dadurch, daß als Ergänzung zur allgemeinen Theorie spezielle Fälle explizit durchgerechnet werden. — Die Bergmannsche Behandlung der Funktionentheorie m. V. hat zunächst wenig Freunde gehabt. In 20 Jahren redlichen und intensiven Bemühens des Verf. hat sie aber manche Frucht getragen, die nicht erwartet wurde. Ganz zweifellos zeigen sich die besonderen Vorteile der Bergmannschen Theorie bei der Durchführung numerischer Spezialaufgaben. Aber auch für die allgemeine Theorie, so für den Riemannschen Abbildungssatz und die Verzerrungssätze sind neue, einfache Beweise gewonnen.

Behnke (Münster).

●Bergmann, Stefan: Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudoconformes. (Mém. Sci. math., Nr. 108). Paris: Gauthier-Villars 1948. 80 p.

Das Heft bildet eine Fortsetzung des vorstehend besprochenen Mémorial-Heftes. In Kap. I wird das Verhalten der Kernfunktion  $K_{\mathfrak{B}}(z, t)$  am Rande untersucht. Dazu wird  $K$  als Minimalfunktion aufgefaßt und  $K_{\mathfrak{B}}$  verglichen mit den Kernfunktionen von  $\mathfrak{B}$  umfassenden und  $\mathfrak{B}$  enthaltenden speziellen Gebieten. So erhält man Schranken für  $K_{\mathfrak{B}}$ . Kap. II bildet den Kern der gesamten Darstellung. Gemäß dem von Bieberbach angegebenen Verfahren in der klass. Funktionentheorie werden jedem Gebiete im  $w, z$ -Raum 2 kovariante Abbildungsfunktionen durch Minimalaufgaben zugewiesen, die zum gegebenen Gebiet und vorgegebenen Bezugspunkt ein Repräsentantengebiet eindeutig zuweisen. Zu diesem gehören alle  $(m, p)$ -Gebiete im Sinne von Henri Cartan. Und nun wird die Verbindung mit den Ergebnissen von H. Cartan über die kreissymmetrischen Gebiete hergestellt. Dann werden die Resultate von Elie Cartan über die homogenen Körper in Beziehung gesetzt zu den Eigenschaften der durch die Kernfunktion definierten Hermiteschen Metrik. In Kap. III wird ein gegebenes Gebiet analytisch auf Gebiete  $\mathfrak{G}$  abgebildet, die alle in einem festen übersichtbaren Gebiet  $\mathfrak{A}$  liegen. So können mittels der Kernfunktion von  $\mathfrak{A}$  Schranken für verschiedene geometrische Größen der Abbildungsfunktionen aufgestellt werden. Kap. IV bringt Zusammenhänge der Kernfunktion mit den Funktionen von Green und Neumann. Den Geometer wird vor allem der häufige Bezug auf das Urgebiet fesseln, das durch die invariante Metrik definiert ist. Im übrigen ist auch dieses Heft reich mit Beispielen spezieller Gebiete ausgestattet. Behnke.

Oka, Kiyoshi: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques. Bull. Soc. math. France 78, 1—27 (1950).

Die Aufgabe, zu lokal vorgegebenen  $(2n-2)$ -dimensionalen Nullstellenmannigfaltigkeiten in einem Gebiete  $\mathfrak{G}$  des Raumes von  $n$  komplexen Veränderlichen eine in  $\mathfrak{G}$  reguläre Funktion  $F$  zu finden, ist schon früh gestellt worden. P. Cousin hat 1895 dies für Zylindergebiete mit einfach zusammenhängender Projektion gelöst. Erst 1944 hat H. Cartan (dies. Zbl. 35, 171) die Fragestellung auf niederdimensionale Mannigfaltigkeiten im  $R^{2n}$  verallgemeinert. Hierbei ist das folgende, bisher nur in Spezialfällen gelöste Problem von Bedeutung: Gegeben sei die lineare Gleichung  $\Phi = \alpha_1 \cdot F_1 + \dots + \alpha_p \cdot F_p$ , worin  $F_1, \dots, F_p$  in  $\mathfrak{G}$  vorgegebene reguläre Funktionen darstellen. In jedem Punkte von  $\mathfrak{G}$  mögen lokale reguläre Lösungen  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  existieren. Gesucht sind globale Lösungen in  $\mathfrak{G}$ . In der vorliegenden Arbeit zeigt Verf. ohne Kenntnis der Cartanschen Untersuchung, daß globale Lösungen stets existieren, falls  $\mathfrak{G}$  ein abgeschlossener Polyzylinder ist. Zum Beweise wird zunächst eine Reihe von Sätzen über Ideale analytischer Funktionen abgeleitet. Dabei ist zu unterscheiden zwischen einem Ideal  $\mathfrak{a}$  in einem Gebiete  $\mathfrak{D}$  (davon wird gesprochen, wenn alle  $f$  aus  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{D}$  regulär sind) und einem Ideal  $\mathfrak{a}$  mit unbestimmtem Gebiete. Im letzten Falle besteht das Ideal aus Funktionen und jeweils zugehörigen Gebieten. Entsprechend werden Kongruenzen und Äquivalenzen eingeführt. Doch bleiben trotz der Algebraisierung grundlegender Begriffe die Untersuchungen spezifisch funktionentheoretisch.

Behnke (Münster).

Nef, Walter: Homogene Räume mit invarianter Metrik. Comment. math. Helvetici 22, 215—231 (1949).

L'A. se propose d'étendre aux espaces homogènes, la méthode variationnelle par laquelle S. Bergmann [Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, New York 1941] a établi l'existence d'une métrique pour un domaine de deux variables complexes invariant pour le groupe des transformations pseudoconformes du domaine sur lui-même. L'espace homogène  $\Omega$  considéré est une variété localement euclidienne satisfaisant aux hypothèses suivantes: le groupe



fondamental  $T$ , différentiable, admet un sous-groupe distingué discret  $D$  tel que le groupe-quotient  $T/D$  soit compact. L'A. établit d'abord l'existence sur  $\Omega$  d'une mesure invariante par  $T$ , puis à l'aide d'une technique élégante d'équations intégrales, il construit sur  $\Omega$  un espace vectoriel fini  $L$ , invariant, de fonctions une fois continûment différentiables jouissant de la propriété suivante: en chaque point de  $\Omega$  et pour chaque direction issue de ce point, il existe au moins une fonction de  $L$  dont la dérivée, dans la direction envisagée, n'est pas nulle. L'A. est alors amené à résoudre le problème variationnel suivant: parmi toutes les fonctions  $f(x)$  de  $L$  qui satisfont à la condition  $\sum_i a^i \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} = 1$  où  $x_0 \in \Omega$  est un point déterminé et les  $a^i$  un système de  $n$  constantes ( $n = \dim. \Omega$ ), trouver celle pour laquelle l'intégrale  $\int_{\Omega_0} |f(x)|^2 dx$  où  $\Omega_0$  est un domaine de discontinuité de  $D$ , est minima.

La valeur de ce minima met en évidence un tenseur symétrique à deux indices qui définit sur  $\Omega$  une métrique invariante par  $T$ . La méthode utilisée conduit l'A. à des généralisations du théorème de Pick et du lemme de Schwarz, en particulier aux résultats suivants: si  $\Omega$  est un espace homogène à 2 dimensions, à groupe transitif pour les directions et doué d'une métrique invariante pour laquelle il existe une transformation conforme de  $\Omega$  en une partie  $\Omega^*$  de mesure invariante finie, toute transformation conforme de  $\Omega$  dans lui-même ne peut que diminuer ou laisser égale la longueur invariante d'un arc de courbe. Si, pour une transformation conforme, la longueur d'un arc de courbe n'est pas modifiée, il en est de même pour tous les arcs de courbe et la transformation est un automorphisme de  $\Omega$ . *Lichnerowicz* (Paris).

**Bers, Lipman: Partial differential equations and generalized analytic functions.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 36, 130—136 (1950).

Eine Funktion der komplexen Variablen  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ , heißt pseudoanalytisch in einem Punkte, falls dort  $u_x = \sigma(x, y) \cdot v_y$  und  $u_y = -\sigma(x, y) \cdot v_x$ ;  $\sigma(x, y) > 0$ . Es zeigt sich, daß die Ähnlichkeit der zugrunde gelegten Differentialgleichungen mit den Cauchy-Riemannschen Gleichungen eine weitgehende Analogie der Theorien ermöglicht. So kann z. B. die Potenzfunktion für jedes rationale  $r$  ( $|r| = p/q \neq 0$ ) definiert werden: Seien  $a \neq 0$  und  $\zeta$  beliebige komplexe Zahlen,  $f(z) = Z^r(a, \zeta, z)$  heißt eine Potenzfunktion, falls  $f(z)$  pseudoanalytisch ist für  $0 < |\zeta - z| < +\infty$ ,  $w = f(z)$  eine eindeutige Abbildung der  $q$ -fach überdeckten  $z$ -Ebene (Verzweigungspunkte  $\zeta$  und  $\infty$ ) auf die  $p$ -fach überdeckte  $w$ -Ebene (Verzweigungspunkte  $0$  und  $\infty$ ) liefert, so daß  $f(\zeta) = 0$  und  $f(\infty) = \infty$  für  $r > 0$  und  $f(\zeta) = \infty$  und  $f(\infty) = 0$  für  $r < 0$ , und falls für  $z \rightarrow \zeta$  die reduzierte Funktion  $\sigma f(z) \sim a(z - \zeta)^r$ .  $f(z)$  ist dadurch eindeutig definiert. Unter der reduzierten Funktion einer pseudoanalytischen Funktion  $f(z)$  versteht man die Funktion  $\sigma f(z) = \sigma^{-\frac{1}{2}} u + i \sigma^{\frac{1}{2}} v$ . In demselben Sinne werden formale Polynome und Potenzreihen betrachtet. Sätze über Singularitäten und mehrdeutige Funktionen beschließen diese Zusammenfassung von Resultaten, für deren Beweise auf eine später zu erscheinende Arbeit verwiesen wird. — In einer früheren Arbeit (L. Bers und A. Gelbart: dies. Zbl. 29, 400) wurde ein Spezialfall des vorliegenden Differentialgleichungssystems behandelt.

*Kriszten* (Zürich).

### Fastperiodische Funktionen:

●Cinquini, Silvio: *Funzioni quasi-periodiche*. Scuola norm. sup. Pisa. Quaderni mat. nr. 4. Pisa: Litografia Tacchi 1949. 132 p. (fektographiert).

Das Buch ist eine Wiedergabe von Vorlesungen, die der Verf. an der Scuola Normale Superiore in Pisa hielt. — Inhaltsverzeichnis: 1. Kapitel. Bohr-fastperiodische Funktionen. § 1. Definition und elementare Eigenschaften. § 2. Mittelwert und Fourierreihe. § 3. Der Approximationssatz. Die Bochner-Fejérschen Polynome. — 2. Kapitel. Stepanoff-fastperiodische Funktionen. § 1. Definition und elementare

Eigenschaften. § 2. Mittelwert und Fourierreihe. § 3. Die Bochner-Fejérschen Polynome und ihre Eigenschaften. — Im ersten Kapitel werden die Hauptsätze über fastperiodische Funktionen von Bohr (quasi-periodische = fastperiodisch, also nicht quasiperiodisch) hergeleitet und zwar auf einem Wege, welcher dem von Bohr in seinem Ergebnisbericht: „Fastperiodische Funktionen“ [Ergebn. Math., Bd. 1 Heft 5, Berlin 1932; dies. Zbl. 5, 203] eingeschlagenen ähnlich ist. Im zweiten Kapitel werden die den Theoremen des 1. Kapitels entsprechenden Sätze über Stepanoff-fastperiodische Funktionen in der gleichen Reihenfolge wie dort bewiesen. Verf. stützt sich dabei hauptsächlich auf die ursprünglichen Abhandlungen von Stepanoff. Beim Beweis der Parsevalgleichung für Stepanoff-fastperiodische Funktionen wird die Parsevalgleichung für Bohr-fastperiodische Funktionen benutzt. Im letzten Paragraphen bringt Verf. einige Ergebnisse über Bochner-Fejér-Polynome, welche er schon früher veröffentlicht hat. [Sopra i polinomi di Bochner-Fejér e le funzioni quasi-periodiche secondo Stepanoff. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat., natur. 78, 391–400 (1945).] Maak (Hamburg).

**Følner, Erling:** A proof of the main theorem for almost periodic functions in an Abelian group. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 559–569 (1949).

Weiß man von einer Gruppe  $\mathcal{G}$  und von jeder ihrer fastperiodischen Funktionen  $f(x)$ , daß bei Variation von  $x$  sich  $f(x)$  beliebig wenig ändert, wenn nur gewisse Normaldarstellungen  $D(x)$  von  $\mathcal{G}$  sich hinreichend wenig ändern, so kann man verhältnismäßig leicht den Hauptsatz der Theorie fastperiodischer Funktionen beweisen [welcher besagt, daß sich  $f(x)$  durch Linearkombinationen der Koeffizienten der  $D(x)$  beliebig genau approximieren läßt]. Schwieriger ist jedoch der Nachweis, daß geeignete Normaldarstellungen existieren, welche das Verhalten von  $f(x)$  (wie angegeben) regulieren. Üblicherweise werden die  $D(x)$  nach Weyl-Peter mittels eines Iterationsverfahrens konstruiert. Ein „elementares“ Verfahren ist z. Z. noch unbekannt. Für den speziellen Fall der Bohr-fastperiodischen Funktionen gibt es allerdings „elementare“ Konstruktionen. Es gelingt Verf., ein solches besonders einfaches von Bogoliouboff angegebenes Konstruktionsverfahren auf den Fall beliebiger Abelscher Gruppen zu übertragen. Er zeigt zunächst ganz ähnlich wie Bogoliouboff den Hilfssatz: Ist  $\mathcal{G}$  eine Abelsche Gruppe mit  $n$  Erzeugenden, ist ferner  $E$  die Menge aller  $\varepsilon$ -Fastperioden einer fastperiodischen Funktion auf  $\mathcal{G}$ , so gibt es  $q$  Charaktere  $\chi_1(x), \dots, \chi_q(x)$ , so daß alle  $x$ , für die

$$(1) \quad \operatorname{Re} \chi_1(x) > 0, \dots, \operatorname{Re} \chi_q(x) > 0$$

gilt, die Gestalt  $x = \tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4$  mit  $\tau_i \in E$  haben. Dabei hängt  $q$  (u. a.) von  $n$  ab, und zwar kann mit wachsendem  $n$  auch  $q \rightarrow \infty$  gelten. Deshalb wird gegenüber Bogoliouboff eine Abänderung durchgeführt: Man kann in (1) das  $q$  von  $n$  unabhängig wählen, erhält dann aber für die  $x$  nur, daß sie von der Gestalt  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 - \tau_5 - \tau_6 - \tau_7 - \tau_8$  mit  $\tau_i \in E$  sind, d. h. die  $x$ , welche (1) genügen, sind Fastperioden zu 8 $\varepsilon$ . Hieraus folgt leicht ein gleichlautender Satz über beliebige abzählbare Abelsche Gruppen, und damit auch der Hauptsatz über fastperiodische Funktionen in abzählbaren Abelschen Gruppen. Da bezüglich der fastperiodischen Funktionen in jeder Gruppe eine abzählbare Gruppe in gewisser Weise überall dicht liegt, folgt der Hauptsatz auch für beliebige Abelsche Gruppen  $\mathcal{G}$ . — Bei der Herleitung des Hauptsatzes aus dem Hilfssatz erhält Verf. als Nebenresultat Angaben über die Kerne bzw. Multiplikatorensysteme, welche bei einer Summierung der Fourierreihen nach Bochner-Fejér angewandt werden können. Maak.

**Bohr, Harald:** On limit periodic functions of infinitely many variables. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejer et F. Riesz LXX annos natis dedic., 145–149 (1950).

In dieser Arbeit betrachtet Verf. stetige Funktionen  $F(x_1, x_2, \dots) = F(X)$  von abzählbarvielen reellen Variablen. Wenn  $F$  in jeder Variablen periodisch ist.



so heißt  $F$  eine periodische Funktion. Deutet man die Variablen  $(x_1, x_2, \dots) = X$  als Punkte eines abzählbar unendlich dimensionalen Raumes  $R$ , so erkennt man, daß diese Definition von „periodisch“ abhängig ist von der Wahl der Koordinatenachsen in  $R$ . Geht man von einem festen Koordinatensystem in  $R$  aus, so kann man alle anderen durch eine entsprechende Koordinatensubstitution  $T$  charakterisieren. Mit  $P_T$  bezeichnen wir die Menge aller bez. der zu  $T$  gehörigen Achsen periodischen Funktionen. Die sämtlichen periodischen Funktionen der Punkte von  $R$  erhält man, indem man  $P = \bigcup_T P_T$  bildet. — Entsprechende Verhältnisse liegen bei den grenz-

periodischen Funktionen vor. Es ist  $H(P_T) = G_T$  die Menge der bez.  $T$  grenzperiodischen Funktionen ( $H$  = abgeschlossene Hülle), während  $G = \bigcup_T G_T$  die Menge aller grenzperiodischen Funktionen darstellt. Man könnte die Menge aller grenzperiodischen Funktionen auch als  $H(P)$  erklären. Verf. zeigt, daß diese beiden Definitionen gleichwertig sind, indem er unter Benutzung von Fourierreihen nachweist, daß  $G$  abgeschlossen ist. Maak (Hamburg).

**Doss, Raouf:** Un théorème ergodique. Bull. Sci. math., II. S. 72, 76—79 (1948).

Es wird in gewisser Weise der Kronecker-Weylsche Satz von der Gleichverteilung der Zahlen mod  $2\pi$  verallgemeinert. Nach Weyl gilt für eine Funktion der Periode  $2\pi$ , irrationales  $\xi/2\pi$  und beliebiges  $x$

$$M\{f\} = \lim \left( \frac{1}{n} \right) \sum_1^n f(x + k\xi).$$

Verf. ersetzt die periodische Funktion  $f(x)$  durch eine Stepanoff-fastperiodische Funktion  $f(x)$  und zeigt, daß für beliebiges reelles  $\xi$  die Mittel  $\left( \frac{1}{n} \right) \sum_1^n f(x + k\xi)$  im Sinne einer mittleren Konvergenz (nach Stepanoff) gegen eine  $L$ -summierbare Funktion  $\psi(x)$  mit der Periode  $\xi$  konvergieren. Wenn die Fourierexponenten  $\lambda_\nu$  von  $f(x)$  derart sind, daß  $\lambda_\nu \xi/2\pi$  niemals ganz ist, so ist  $\psi(x) = M\{f\}$ , also (im Mittel) gleich einer Konstanten. Bei der Konstruktion von  $\psi(x)$  wird von der Bochner-Fejérschen Methode der Summierung von Fourierreihen Gebrauch gemacht. Beim Beweis des Satzes wird das Weylsche Theorem benutzt. Maak (Hamburg).

**Doss, Raouf:** Some theorems on almost periodic functions. Amer. J. Math. 72, 81—92 (1950).

Eine nach Besicovitch fastperiodische Funktion  $f(x) \sim \sum b_\nu e^{i\lambda_\nu x}$  heißt B-fp Funktion mit der Basis  $\{\beta_i\}$ , wenn alle  $\lambda_\nu$  Linearkombinationen der  $\beta_i$  mit rationalen Koeffizienten sind. Es gelten folgende Sätze: I. Jedes lineare Funktional  $U(f)$ , erklärt im Raume aller B-fp Funktionen der Basis  $\{\beta_i\}$ , ist von der Gestalt  $U(f) = M_x\{f(x)\alpha(x)\}$ , wobei  $\alpha(x)$  eine beschränkte B-fp Funktion ist. — II. Jedes lineare Funktional  $U(f)$ , erklärt im Raume aller Bohr-fp Funktionen der Basis  $\{\beta_i\}$  ist von der Form  $U(f) = M_x\{f(x)\alpha(x)\}$ , wobei  $\alpha(x)$  über jedes endliche Intervall summierbar ist,  $M_x\{e^{i\lambda_\nu x}\alpha(x)\}$  existiert und  $M_x\{|\alpha(x)|\} < \infty$  gilt. — Der Beweis (z. B.) von I wird geführt, indem mit Hilfe Bochner-Fejérscher Summen eine Funktion mit der Fourierreihe  $\sum a_\nu e^{-i\lambda_\nu x}$  konstruiert wird, wobei  $a_\nu = U(e^{i\lambda_\nu x})$  ist. — In Satz III wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine trigonometrische Reihe die Entwicklung einer geeigneten B-fp Funktion  $\alpha(x)$  ist. Unter Benutzung dieses Satzes läßt sich zeigen, daß in I als Definitionsbereich für  $U(f)$  auch die Menge aller B-fp Funktionen gewählt werden darf. Maak.

**Levin, B.:** Über quasianalytische Klassen fastperiodischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 949—952 (1950) [Russisch].

$f(t)$  étant une fonction intégrable on pose  $\theta(\alpha; t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \alpha} |f(t)| dt$ . Soit  $\wedge = \psi(r)$

la fonction inverse de  $r = -\frac{\log \theta(\alpha; t_0)}{\alpha}$ . Supposons que  $f(t) \sim \sum a_k e^{i\mu_k t}$  soit

une fonction presque-périodique où  $\{\mu_k\} \subset \{\lambda_k\} = A$ . Soit  $n(r)$  le nombre des  $\lambda_k$  compris dans l'intervalle  $(-r, r)$  et posons

$$\zeta_A(r) = 2r^2 \int_0^\infty \frac{n(t)}{t(n^2 + r^2)} dt.$$

Si pour un point  $t_0$  on a  $\lim_{r \rightarrow \infty} [3\zeta_A(2r) - r\psi(r)] = +\infty$  alors  $f(t) = 0$  presque partout. Ce théorème généralise un résultat de Levin et Lifschitz [Mat. Sbornik, n. S. 9 (51), 693 (1941); cf. aussi Mandelbrojt, Duke math. J. 9, 647—661 (1942)] qui à son tour est une extension d'un théorème de Mandelbrojt [Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Paris 1935, Ch. VII.; ce Zbl. 13, 110; voir aussi Mandelbrojt et Wiener, C. r. Acad. Sci., Paris 203, 34—36, 233—234 (1936); ce Zbl. 14, 304; et Wiener, C. r. Congr. internat. Math., Oslo 1936, 1, 284—296; ce Zbl. 19, 34].

Horváth (Paris).

**Hartman, S.: Sur les bases statistiques.** Studia math. 10, 120—139 (1948).

Es sei  $f(x)$  eine fastperiodische Funktion, bei welcher — wie nach Wintner (1933) bei jenen mit linear unabhängigen Frequenzen — die Distributionsfunktion (asymptotische Verteilungsfunktion)

$$\varrho(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} [\text{mes}(x \mid f(x) < a, 0 < x < T)]/T = \lim M/T$$

für jedes  $a$  existiert, stetig und somit gleichmäßig stetig ist. Bezeichnet nun  $\delta_\varrho(\mu)$  deren  $\mu$ -Modul der gleichmäßigen Stetigkeit, d. h. das größte  $\delta$ , bei welchem  $|\varrho(a) - \varrho(a_0)| < \mu$  für  $|a - a_0| < \delta$  bei allen  $a_0$  wird und  $T_{\min}(f, \varepsilon)$ , die sog. minimale statistische  $\varepsilon$ -Basis von  $f(x)$ , das kleinste  $T$ , bei welchem  $M/T$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\varrho(a)$  liegt, so wird gezeigt, daß

$$T_{\min}(f, \varepsilon) < 5/\varepsilon L[f, \delta_\varrho(\varepsilon/5)]$$

ist. Hierbei bezeichnet  $L[f, \eta]$  eine solche positive Zahl, daß in jedes Intervall von der Länge  $L[f, \eta]$  ein  $\tau$  mit  $|f(x + \tau) - f(x)| < \eta$  fällt. Diese Abschätzung wird auch auf die minimale statistische  $\varepsilon$ -Basis eines Systems von statistisch unabhängigen fastperiodischen Funktionen mit stetigen Distributionsverallgemeinert. Der Auszug aus der durch H. Steinhaus angeregten Dissertation des Verf. schließt mit der Abschätzung von  $L[F, \eta]$  eines Systems  $F$  zweier stetigen periodischen Funktionen  $f_1, f_2$  mit gegebenen inkommensurablen Perioden  $\pi_1, \pi_2$  und bekannten  $\mu$ -Moduln  $\delta_{f_1}(\mu), \delta_{f_2}(\mu)$  ihrer gleichmäßigen Stetigkeit. Szentmártony (Budapest).

## Gewöhnliche Differentialgleichungen:

**Garcia Aracé, Rafael: Rationale Kurven und algebraische Differentialgleichungen.** Gaz. mat., Madrid, I. S. 2, 6—14 (1950) [Spanisch].

Die charakteristische Eigenschaft der rationalen Kurven besteht bekanntlich darin, daß sich die Koordinaten ihrer Punkte als rationale Funktionen eines Parameters derart darstellen lassen, daß zu jedem Punkt der Kurve ein einziger Wert des Parameters gehört. Verf. betrachtet insbesondere die nicht zerfallenden Kegelschnitte, die Kurven vom Grad  $m$  mit einem mehrfachen Punkt der Ordnung  $m - 1$  im Ursprung und die bizirkularen Kurven 4. Ordnung, deren drei Doppelpunkte die beiden Kreispunkte und ein anderer reeller eigentlicher Punkt sind. Die parametrischen Darstellungen dieser drei Klassen von rationalen Kurven werden zur Integration von gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen benutzt. Dies gelingt in zahlreichen Fällen, die im einzelnen gekennzeichnet und durch Beispiele erläutert werden, dadurch, daß der Differentialgleichung eine rationale Kurve zugeordnet wird, deren Parameterdarstellung ein Mittel zur Integration liefert. Auch die partielle Differentialgleichung erster Ordnung  $F(x, y, z, p, q) = 0$  kann unter



Umgehung der bei der Methode von Lagrange zuweilen auftauchenden Schwierigkeiten in gewissen Fällen integriert werden, wenn man  $p, q$  als cartesische Koordinaten in einer Ebene und  $x, y, z$  als Parameter deutet. Die genannte Gleichung stellt dann eine dreifach unendliche Kurvenfamilie dar. Wenn die Kurven dieser Familie rational sind, dann ist die Differentialgleichung unter gewissen Bedingungen integrierbar. Dies wird zunächst an einigen Beispielen gezeigt. Sodann werden die Integrabilitätsbedingungen genauer untersucht und für eine Reihe von Fällen präzisiert. Auf diese Weise gelingt es, eine Reihe ziemlich komplizierter partieller Differentialgleichungen zu integrieren. *E. Löffler (Stuttgart).*

**Šachova, N. G.:** Lage der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung im allgemeinen Falle. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 13—16 (1949) [Russisch].

Verf. weist auf die wenig untersuchten Differentialgleichungen  $dy/dx = f(x, y)$  vom Lavrentieffschen Typus hin [M. Lavrentieff, Math. Z., Berlin 23, 197—209 (1925)], die dadurch gekennzeichnet sind, daß für jeden Punkt des Definitionsbereiches die beiden Peanoschen extremen Integralkurven, sowohl rechtsseitig wie linksseitig, nicht zusammenfallen, so daß also in jedem Punkt eine Mehrdeutigkeit für die hindurchgehenden Lösungskurven besteht, und auf ihre eigentümlichen Eigenschaften. So besteht für sie der Satz, daß eine feste, abzählbare Folge von Integralkurven existiert derart, daß man bei beliebig vorgegebenem Punkt des Bereiches aus Bögen dieser Folge unmittelbar eine durch ihn hindurchgehende Integralkurve zusammensetzen kann. Für eine Differentialgleichung, deren Lösungskurven den Bereich in einfacher Weise, d. h. ohne sich gegenseitig zu schneiden, überdecken, braucht man, um dasselbe zu erreichen, eine Lösungsmannigfaltigkeit von der Mächtigkeit des Kontinuums. — Verf. sucht die Beschäftigung mit den Lavrentieffschen Differentialgleichungen dadurch anzuregen, daß sie verschiedene Vermutungen über ihre Eigenschaften ausspricht und eine Reihe von ungelösten Problemen angibt. Z. B. vermutet sie, daß es nicht möglich sei, aus der Menge der Lösungskurven eine Teilmenge herauszugreifen, die den Bereich in einfacher Weise überdeckt. Ungelöst ist z. B. die Frage, ob man jede Integralkurve, insbesondere die Peanoschen extremen, mittels der oben erwähnten festen Folge von Kurven zusammensetzen kann. *Svenson (Heidelberg).*

**Butlewski, Z.:** Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles linéaires ordinaires. Studia math. 10, 40—47 (1948).

Es handelt sich um Abschätzungssätze für die Lösungen  $x_p(t)$  des Differentialgleichungssystems

$$(1) \quad x'_p(t) + \sum_{q=1}^n a_{pq}(t) x_q = f_p(t) \quad (p = 1, \dots, n),$$

wobei  $t$  eine komplexe Veränderliche mit konstantem  $\operatorname{arc} t = \omega$  ist und die  $a_{pq}, f_p$  stetig für  $\operatorname{arc} t = \omega$ ,  $|t| \geq t_0$  sind. Es wird z. B. bewiesen: Konvergieren die Integrale

$$\int_{|t_0|}^{\infty} |a_{pq}| d|t|, \quad \int_{|t_0|}^{\infty} |f_p(t)| d|t| \quad (p, q = 1, \dots, n),$$

so sind alle Lösungen von (1) beschränkt, aber nicht alle Lösungen des homogenen Systems streben gegen 0. *Kamke (Tübingen).*

**Ważewski, T.:** Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations différentielles linéaires. Studia math. 10, 48—59 (1948).

Die Abschätzungen beziehen sich auf die Lösungen  $y_p = y_p(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$  mit den Anfangswerten  $\eta_p$  für  $x = \xi$  des Differentialgleichungssystems

$$(1) \quad y'_p = \sum_{q=1}^n a_{pq}(x) y_q + b_p(x) \quad (p = 1, \dots, n),$$

wo die  $a_{pq}, b_p$  komplex sein dürfen und stetig sein sollen für  $-\infty \leq \alpha < x < \beta \leq +\infty$ .  
 — Es seien  $s(x), S(x)$  kleinster und größter Eigenwert der Hermiteschen Form

$$Q(x; \xi) = \frac{1}{2} \sum_{p,q} (a_{pq} + \bar{a}_{qp}) \xi_p \bar{\xi}_q.$$

Ferner seien  $t(x), T(x), l(x), L(x)$  stetige Funktionen, die in  $(\alpha, \beta)$  die Ungleichungen

$$(2) \quad t(x) \leq s(x) \leq S(x) \leq T(x)$$

und

$$l(x) \leq -B(x), \quad L(x) \geq B(x) \quad \text{mit} \quad B^2 = \sum_p |b_p|^2$$

erfüllen. Wird

$$r(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n) = \left( \sum_p |\varphi_p(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta = \left( \sum_p |\eta_p|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt, so ist

$$(3) \quad \varphi(x, \xi, \eta) \leq r \leq \Phi(x, \xi, \eta) \quad \text{für} \quad \xi \leq x < \beta$$

(und mit  $\geq$  statt  $\leq$  für  $\alpha < \xi \leq x$ ), wenn  $\varphi(x, \xi, \eta), \Phi(x, \xi, \eta)$  die Integrale mit den Anfangswerten  $\eta$  für  $x = \xi$  der Differentialgleichungen

$$z'(x) = tz + l, \quad z'(x) = Tz + L$$

sind. — Es wird eine Reihe von Funktionen  $t, T$  (ausgedrückt durch die  $a_{pq}$ ) angegeben, für die (2) erfüllt ist. Aus (3) folgen Sätze über die Beschränktheit der  $\varphi_p$ . Ein etwas weniger scharfer Satz als der zitierte wird ohne Bezugnahme auf die Hermiteschen Formen bewiesen. Kamke (Tübingen).

**Szarski, Jacek:** On an oscillatory property of successive approximations. Ann. Soc. Polonaise Math. 22, 201—206 (1950).

Die Funktionen  $f^i(t, y^1, y^2, \dots, y^n)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) seien für alle  $y^1, \dots, y^n$  und  $a < t < b$  stetig und in der Weise monoton, daß mit einem  $k, 0 \leq k \leq n$ , aus

$$(1) \quad y^i \leq \bar{y}^i \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad y^i \geq \bar{y}^i \quad (i = k+1, \dots, n)$$

immer folgt

$$(2) \quad \begin{aligned} f^i(t, y^1, \dots, y^n) &\geq f^i(t, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n) & (i = 1, 2, \dots, k) \\ f^i(t, y^1, \dots, y^n) &\leq f^i(t, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n) & (i = k+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Sei  $y^i = y^i(t)$  eine für  $t \leq t < b$  definierte Lösung von

$$(3) \quad \dot{y}^i = f^i(t, y^1, \dots, y^n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

die durch den Punkt  $(t, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^n)$  gehen möge, seien schließlich  $y_0^i(t)$  ( $t \leq t < b$ )

eine beliebige stetige Kurve und  $y_{v+1}^i(t) = \bar{y}^i + \int_t^t f^i(\tau, y_v^1(\tau), \dots, y_v^n(\tau)) d\tau$

( $i = 1, 2, \dots, n; v = 0, 1, 2, \dots$ ) die Picardschen Approximationen. Sind dann die Differenzen

$$(4) \quad \begin{aligned} y_0^i(t) - y^i(t) &\geq 0 \quad (\leq 0) & (i = 1, 2, 3, \dots, k) \\ y_0^i(t) - y^i(t) &\leq 0 \quad (\geq 0) & (i = k+1, \dots, n). \end{aligned}$$

so gilt

$$(5) \quad \begin{aligned} y_v^i(t) - y^i(t) &\begin{cases} \geq 0 & (\leq 0) & (v \text{ gerade}) \\ \leq 0 & (\geq 0) & (v \text{ ungerade}) \end{cases} & (i = 1, 2, \dots, k) \\ y_v^i(t) - y^i(t) &\begin{cases} \leq 0 & (\geq 0) & (v \text{ gerade}) \\ \geq 0 & (\leq 0) & (v \text{ ungerade}) \end{cases} & (i = k+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Wird in den Voraussetzungen (1), (2) und in (4) für  $t < t < b$  das Gleichheitszeichen gestrichen, so verschärft sich auch die Behauptung (5), indem das Gleichheitszeichen für  $t < t < b$  ausgeschlossen bleibt. — Diese Bemerkungen, deren



Beweis durch Induktion folgt, verallgemeinern ein Resultat von A. Wintner (dies. Zbl. 31, 397). F. W. Schäfke (Mainz).

Gennaro, Antonio de: Sul compartamento asintotico degli integrali di certe equazioni differenziali lineari ordinarie. Giorn. Mat. Battaglini 79, 49—62 (1949).

In un precedente lavoro [questo Zbl. 34, 353] l'A. ha dato criteri di stabilità per le soluzioni dell'equazione

$$(1) \quad \sum_{r=0}^{n-1} [p_r(x) - \varphi_r(x)] y^{(r)}(x) + y^{(n)}(x) = \varphi(x)$$

dove le  $p_r(x)$  sono funzioni continue periodiche di periodo  $\omega$ , le  $\varphi_r(x)$  e  $\varphi(x)$  sono quasi continue in  $(0, +\infty)$  e verificano opportune condizioni e i numeri caratteristici dell'equazione

$$(2) \quad \sum_{r=0}^{n-1} p_r(x) y^{(r)}(x) + y^{(n)}(x) = 0$$

sono non positivi. Nel presente lavoro viene tolta la condizione relativa ai numeri caratteristici della (2) e si stabiliscono delle relazioni asintotiche che legano gli integrali della (1) e della (2), quando le funzioni  $\varphi_r(x)$  e  $\varphi(x)$  soddisfano a condizioni di tipo analogo a quelle date da A. Ghizzetti e dal Relatore quando le  $p_r(x)$  sono costanti.

Sandro Faedo (Roma).

Avakumović, Vojislav G.: Sur le problème aux limites des équations différentielles du second ordre non linéaires. Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 53—65 und franz. Zusammenfassg. 65—66 (1948) [Serbisch].

A. Rosenblatt [Bull. Soc. Math. Grèce 14, 7 (1933); ce Zbl. 7, 207] considérant le problème aux limites d'une équation différentielle non linéaire du second ordre (1)  $y'' = f(x, y, y')$ ,  $y(a) = A$ ;  $y(b) = B$  a remplacé la condition de Lipschitz par la condition plus générale

$$|f(x, y_1, y'_1) - f(x, y_2, y'_2)| < \frac{\alpha |y_1 - y_2|}{(x-a)^2 (b-x)^2} + \frac{\beta |y'_1 - y'_2|}{(x-a)(b-x)},$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant deux nombres positifs à la condition

$$(2) \quad \left( \frac{2^{2-m}}{1-m} + \frac{1}{m} \right) \frac{\alpha}{(b-a)^2} + \frac{2(1+m)}{m(1-m)} \frac{\beta}{(b-a)} < 1,$$

$m$  étant un nombre arbitraire tel que  $0 < m < 1$ . — En outre, lorsque les inégalités

$$(3) \quad |f(x, y, y')| < M, \quad (4) \quad \frac{(b-a)^2 M}{8} + B \leq L \quad \text{et} \quad \frac{(b-a)M}{2} + \frac{|B-A|}{b-a} \leq L'$$

sont remplies pour (5)  $a \leq x \leq b$ ,  $|y| \leq L$  et  $|y'| \leq L'$  il existe alors une intégrale  $y(x)$  unique ayant les valeurs  $A$  pour  $x = a$  et  $B$  pour  $x = b$ ,  $y'(x)$  étant continu dans  $a \leq x \leq b$  et  $y(x)$  satisfaisant à l'équation (1) dans le même intervalle. Cette intégrale est donnée par les approximations successives de E. Picard. — Dans le présent travail l'auteur montre, entre autres choses, que l'on peut remplacer l'inégalité (2) par une plus précise, à savoir

$$2 \left\{ \frac{\alpha}{(b-a)^2} + \frac{\beta}{b-a} \right\} < 1, \quad \text{ainsi que les conditions (3), (4) et (5) par les conditions plus générales suivantes: Il existe une fonction positive } F(x) \text{ intégrable dans l'intervalle fermé } (a, b) \text{ et telle que l'inégalité}$$

$$|f(x, y, y')| < F(x) \text{ est remplie pour } \left| y - A - \left( \frac{B-A}{b-a} \right) (x-a) \right| < \Phi(x) \text{ et}$$

$$\left| y' - \left( \frac{B-A}{b-a} \right) \right| < \Phi^*(x) \text{ toutes les fois que les fonctions } \Phi(x) \text{ et } \Phi^*(x) \text{ sont définies par}$$

$$\Phi(x) = \left( \frac{b-x}{b-a} \right) \int_a^x (z-a) F(z) dz + \left( \frac{x-a}{b-a} \right) \int_x^b (b-z) F(z) dz$$

et

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^x (z-a) F(z) dz + \frac{1}{b-a} \int_x^b (b-z) F(z) dz.$$

On peut en conclure la proposition suivante relative à l'intervalle des  $x$ , séparant deux zéros consécutifs de  $y$ : Supposons que la fonction  $f(x, y, y')$  satisfasse aux conditions suivantes:  $f(x, 0, y') = 0$ ,  $|f(x, y, y')| < M$ ,  $|\partial f / \partial y| < m$  et  $|\partial f / \partial y'| < m'$  pour  $|y| < (x-a)(b-x)M/2$ ,  $|y'| < \{(x-a)^2 + (b-x)^2\}M/2$ . Soit ensuite  $y(x)$  une intégrale de l'équation différentielle  $y'' = f(x, y, y')$  et  $a$  et  $b$  deux zéros consécutifs de  $y(x)$ . Alors  $b-a > \frac{-m' + \sqrt{m'^2 + 4m}}{m}$ . (Autoreferat).

**Avakumović, Vojislav G.: Sur l'équation différentielle de Thomas-Fermi. Théorèmes relatifs à l'existence des intégrales.** Glas Srpske Akad. Nauka CXCI (I, 96), 163—185 und franz. Zusammenfassg. 186—187 (1948) [Serbisch].

L'A. démontre les théorèmes suivants: A. Soit  $f(x, y)$  et  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  continues et  $> 0$  pour tout  $0 < x < \infty$ ,  $0 < y < 1 + \delta$ ,  $\delta$  étant un nombre positif. De plus, l'intégrale

$$I = \int_a^x \int_\tau^\infty f(t, y) dt d\tau$$

divergeant lorsque  $x \rightarrow \infty$  pour toute fonction  $y = y(t)$  convexe et  $> \varepsilon > 0$ . Alors, il existe une solution unique de l'équation

$$(1) \quad y'' = f(x, y)$$

satisfaisant aux conditions  $y(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ . — B. Soit  $f(x, y)$  continue

et  $> 0$  pour tout  $0 < x < \infty$ ,  $0 < y < 1 + \delta$ ,  $\delta$  étant un nombre positif. De plus, supposons les conditions suivantes satisfaites: 1. Il existe un  $x$ , tel que l'équation (1) possède au moins une intégrale satisfaisant aux conditions  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$  et

$y(x_0) = b$ , pour tout  $0 \leq b \leq 1 + \delta'$  avec  $0 < \delta' < \delta$ . — 2. Pour tout  $x_0$  pour lesquels la condition (1) est remplie,  $y(x)$  est une solution unique et  $> 0$  pour tout  $0 \leq x \leq x_0$ . — 3. L'intégrale  $I$  diverge lorsque  $x \rightarrow \infty$  pour chaque fonction  $y = y(t)$  convexe et  $0 < \varepsilon \leq y \leq 1 + \delta'$ . Alors, il existe au moins une intégrale de l'équation (1) satisfaisant aux conditions  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ . —

C. Soit  $0 < \Theta < 1$ ,  $\tau(\Theta) = 1/(1-\Theta)$  pour  $\Theta > \frac{1}{2}$ ,  $= 2$  pour  $\Theta = \frac{1}{2}$ ,  $= 1/\Theta$  pour  $\Theta < \frac{1}{2}$  et  $A(x, y)$  une fonction continue pour tout  $0 < x < 1$ ,  $0 \leq y \leq M$ ,

$$|A(x, y)| < \frac{N}{x^{1+\theta}(1-x)^{1+\theta}} \quad \text{avec} \quad N < \frac{1}{\tau(\Theta)} 2^{1-2\theta} M$$

$$\text{et} \quad |A(x, y_1) - A(x, y_0)| < \frac{\alpha |y_1 - y_0|}{x^2(1-x)^2} \quad \text{avec} \quad \alpha < \frac{1}{\tau(\Theta)}$$

pour tout  $y_0$  et  $y_1$  de l'intervalle  $(0, M)$ . Alors, il existe une intégrale unique de l'équation  $y'' = A(x, y)$  satisfaisant aux conditions  $y(0) = y(1) = 0$ . — D. Soit  $f(x)$  une fonction continue et  $> 0$  pour tout  $x > 0$ ,  $f(x)/x^\theta < \infty$  pour  $x$  suffisamment petit et  $f(x)/x^\theta > c > 0$  pour  $x$  suffisamment grand,  $\Theta$  étant un nombre  $> -2$ . Alors, il existe une intégrale unique de l'équation  $y'' = f(x)y^\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , satisfaisant aux conditions  $y(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ . (Autoreferat).

**Hartman, Philip and Aurel Wintner: On non-linear differential equations of first order.** Amer. J. Math. 72, 347—358 (1950).

Teil I beschäftigt sich — vor allem im Hinblick auf die Frage der Darstellung von Lösungen als Laplace-Stieltjes-Transformierte von nicht-abnehmenden Funktionen — mit der Existenz vollständig-monotoner Lösungen, Teil II mit der Existenz oder Nichtexistenz von beliebig fortsetzbaren (unrestricted) Lösungen. Hauptergebnisse, zu denen noch einige bemerkenswerte Corollare kommen, sind: Teil I: Die Funktion  $y(x)$  heißt „vollständig monoton“ in einem Intervall, falls sie dort Ableitungen beliebig hoher Ordnung mit  $(-1)^n y^{(n)}(x) \geq 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) besitzt. (I) Sind  $F(x, y)$ ,  $G(x, y) > 0$  für  $x > 0$ ,  $y > 0$  beliebig oft differenzierbar, und genügen ihre partiellen Ableitungen den Bedingungen  $(-1)^j \partial^{j+k} F / \partial x^j \partial y^k \geq 0$  ( $j, k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $(-1)^{j+k} \partial^{j+k} G / \partial x^j \partial y^k \geq 0$  für  $(j, k) \neq (0, 0)$ , dann ist jede Lösung  $y(x) (> 0)$  von  $F + G y' = 0$



vollständig monoton in ihrem Existenzintervall. (II) Sind  $F(x, y), G(x, y) > 0$  für  $x > 0, y > 0$  beliebig oft differenzierbar mit  $(-1)^{j+k} \partial^{j+k} F / \partial x^j \partial y^k \geq 0$  ( $j, k = 0, 1, 2, \dots$ ) und  $(-1)^{j+k+1} \partial^{j+k} G / \partial x^j \partial y^k \geq 0$  für  $(j, k) \neq (0, 0)$ , dann besitzt jede Lösung  $y(x) (> 0)$  von  $F - G y' = 0$  in ihrem Existenzintervall eine vollständig monotone Ableitung  $y'(x)$ . Teil II: (III) Sei  $f(x) \geq 0$  stetig für große positive  $x$ , derart, daß (1)  $r'' + f(x)r = 0$  nicht-oszillatorisch ist [z. B. wenn  $\limsup_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) < \frac{1}{4}$ ]. Sei  $F(x, y)$  stetig für  $x > 0, y > 0$  mit

$0 \leq F(x, y) < y^2 + f(x)$  ( $X \leq x < \infty, 0 < y \leq \varepsilon; X > 0, \varepsilon > 0$ ). Dann besitzt (2)  $F(x, y) + y' = 0$  nicht nur Lösungen mit endlichem Existenzintervall; ist insbesondere  $X$  hinreichend groß gewählt und  $y(x)$  eine Lösung von (2) mit  $y(x_0) = y_0, x_0 \geq X, y_0 \geq \varepsilon$ , so kann  $y(x)$  über die Halbgerade  $x_0 \leq x < \infty$  fortgesetzt werden. (IV) Sei  $f(x)$  eine stetige Funktion für  $0 \leq x < \infty$  derart, daß (1) oszillatorisch ist [z. B. wenn  $\liminf_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) > \frac{1}{4}$ ]. Sei  $F(x, y)$  stetig für  $x > 0, -\infty < y < \infty$  mit  $F(x, y) > y^2 + f(x)$  ( $X \leq x < \infty, -\infty < y < \infty$ ). Dann besitzt jede Lösung von (2) nur ein endliches Existenzintervall. F. W. Schäfke.

**Leighton, Walter:** The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation. Duke math. J. 17, 57—62 (1950).

In der Differentialgleichung  $(r(x)y')' + p(x)y = 0$  seien  $r(x)$  und  $p(x)$  stetig und  $r(x) > 0$  in  $0 < x < \infty$ . Bei Einführung von

$$r_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x r^{-1} dx, \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x p dx, \quad r_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x r^{-1} dx, \quad p_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x p dx$$

gilt:

Ist  $p(x)$  für kleine  $x$  positiv und  $r_0 = +\infty, p_0 = +\infty$ , so hat jede Lösung der Differentialgleichung im Intervall  $(0, 1)$  unendlich viele Nullstellen; ist  $p(x)$  für große  $x$  positiv und  $r_\infty = +\infty, p_\infty = +\infty$ , so hat jede Lösung in  $(1, \infty)$  unendlich viele Nullstellen. Durch eine einfache Transformation geht die Differentialgleichung über in die „Normalform“  $(xy')' + p_1(x)y = 0$ ; dann ist

$$\int_x^1 p_1(x) dx \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow 0$$

hinreichend für Existenz unendlich vieler Nullstellen der Lösungen im Intervall  $(0, 1)$ , und wenn  $p_1(x)$  positiv und  $O(x^{-\alpha})$  mit  $\alpha > 1$  ist für große  $x$ , so hat jede Lösung in  $(1, \infty)$  höchstens endlich viele Nullstellen. Durch Einführung der Folge von Funktionen  $x, x |\ln x|, x \ln |\ln x|, \dots$  kann eine Folge von Kriterien aufgestellt werden, die hinreichend für unendlich viele Nullstellen der Lösungen in  $(0, 1)$  oder in  $(1, \infty)$  sind und von denen jedes weiterreichend ist als das vorhergehende Kriterium. Collatz (Hannover).

**Cherry, T. M.:** Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. Trans. Amer. math. Soc. 68, 224—257 (1950).

Für die Lösungen von (1)  $d^2y/dz^2 + y\{-v^2z + g(z, v^{-2})\} = 0$ , wo  $g(z, w)$  bei  $z = 0, w = 0$  regulär und  $v$  großer Parameter ist, werden asymptotische Formeln abgeleitet, deren Fehler  $O(v^{-m})$  ist —  $m$  eine beliebig große natürliche Zahl —, gleichmäßig in einem abgeschlossenen, von  $v$  unabhängigen  $z$ -Bereich mit  $z = 0$  im Innern. Auf die Form (1) ist die allgemeinere Differentialgleichung

$$(2) \quad d^2y/dx^2 + R(x, v^{-2}) dy/dx + Y\{-v^2 f(x) + Q(x, v^{-2})\} = 0$$

zurückführbar, in der  $R(x, w), Q(x, w)$  bei  $x = 0, w = 0$  analytisch sind und  $f(x)$  bei  $x = 0$  eine einfache Nullstelle besitzt. Das angewandte Verfahren besteht darin, zum Vergleich die Airysche Differentialgleichung (3)  $d^2\eta/d\zeta^2 - v^2 \zeta \eta = 0$  heranzuziehen, die durch eine Transformation

$$(4) \quad \zeta = \varphi(z) = z + v^{-2} \varphi_1(z) + v^{-4} \varphi_2(z) + \dots, \quad \eta = y(\varphi'(z))^{1/2}$$

zu einer Differentialgleichung

$$(5) \quad d^2y/dz^2 + y\left\{-v^2 \varphi(z)(\varphi'(z))^2 + \frac{\varphi'''(z)}{2\varphi'(z)} - \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right)^2\right\} = 0$$

wird. Die linken Seiten von (5) und (1) unterscheiden sich um  $y \cdot O(|v|^{-2n})$ , wenn in (4), (5) geeignete  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , nach einfacher Rechnung sukzessive bestimmt,

eingesetzt werden. Unter gewissen Voraussetzungen über  $g(z, r^{-2})$  werden noch  $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots$  so berechnet, daß die beiden Glieder auch noch für große  $|z|$  möglichst übereinstimmen. Die Methode wird angewandt zur Approximation von Besselfunktionen hoher Ordnung —  $s^{1/2} J_\nu(\lambda(1-s^2)^{1/2})$  wird dabei benutzt. Ferner werden gewisse hypergeometrische Funktionen  $F(a_\nu, b_\nu, \nu+1; \tau)$  für großes  $\nu$  durch Besselfunktionen der Ordnung  $\nu$  approximiert. Wegen Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. F. W. Schäfke (Mainz).

**Greco, Donato:** Gli sviluppi in serie di autosoluzioni in un problema ai limiti relativo ad un' equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. Giorn. Mat. Battaglini **79**, 86—120 (1949).

L'A. in un precedente lavoro [questo Zbl. **33**, 271] aveva studiato direttamente le soluzioni dell'equazione

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left[ \Theta(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda A(x) + B(x)] y = 0$$

soddisfacenti le condizioni ai limiti

$$(2) \quad \begin{cases} (\alpha_{1,1} \lambda + \alpha'_{1,1}) y(a) + (\alpha_{1,2} \lambda + \alpha'_{1,2}) y'(a) = 0 \\ (\alpha_{2,1} \lambda + \alpha'_{2,1}) y(b) + (\alpha_{2,2} \lambda + \alpha'_{2,2}) y'(b) = 0 \end{cases}$$

nelle ipotesi  $\Theta(x) > 0$ ,  $A(x) > 0$ ,  $B(x) < 0$ ,  $\alpha_{1,1} \alpha'_{1,2} - \alpha_{1,2} \alpha'_{1,1} > 0$ ,  $\alpha_{2,1} \alpha'_{2,2} - \alpha_{2,2} \alpha'_{2,1} < 0$ . — L'A. riprende ora il problema alla luce della teoria delle equazioni integrali; assumendo come funzione incognita  $\eta(x) = y(x) [A(x)]^{\frac{1}{2}}$  il sistema (1), (2) si riduce ad un'equazione integrale o del tipo

$$(3) \quad \eta(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \eta(\xi) d\xi - \lambda \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda}{\lambda - a_i} \int_a^b H_i(x, \xi) \eta(\xi) d\xi,$$

o del tipo

$$(4) \quad \eta(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \eta(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b H_0(x, \xi) \eta(\xi) d\xi - \frac{\lambda^2}{\lambda - a_1} \int_a^b H_1(x, \xi) \eta(\xi) d\xi.$$

Per le equazioni (3) valgono i risultati di C. Miranda [questo Zbl. **25**, 410] che possono estendersi alle (4), nel caso che il nucleo  $H_0(x, \xi)$  risulti simmetrico e definito o semidefinito positivo. Il nuovo metodo consente all'A. di risolvere il problema della sviluppabilità in serie di autofunzioni relative al sistema (1), (2) delle funzioni  $f(x)$  con derivata assolutamente continua e con  $f''(x)$  di quadrato sommabile in  $(a, b)$ .

Giovanne Sansone (Firenze).

**Titchmarsh, E. C.:** On the discreteness of the spectrum of a differential equation. Acta Sci. math., Szeged **12 B**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 16—18 (1950).

Weyl hat gezeigt, daß das Spektrum der Differentialgleichung

$$d^2\varphi/dx^2 + \{\lambda - q(x)\} \varphi = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad \varphi(0) \cos \alpha + \varphi'(0) \sin \alpha = 0$$

diskret ist, wenn  $q(x) \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Für diesen Satz wird ein neuer einfacher Beweis gegeben.

Rellich (Göttingen).

**Campbell, Robert:** Sur une expression remarquable des solutions de période  $2k\pi$  de l'équation de Mathieu associée. Bull. Soc. math. France **77**, 1—9 (1949).

Die assoziierte Mathieusche Differentialgleichung

$$(1) \quad y''(x) + 2\nu y'(x) \operatorname{ctg} x + (a + k^2 \cos^2 x) y(x) = 0$$

geht durch die Transformation  $z = \cos x$ ,  $y(x) = \eta(z)$  über in die Differentialgleichung

$$(2) \quad (z^2 - 1) \eta''(z) + (2\nu + 1) z \eta'(z) - (a + k^2 z^2) \eta(z) = 0,$$

für die  $z = \pm 1$  singuläre Stellen der Bestimmtheit mit den Indizes  $0, \frac{1}{2} - \nu$  sind. Lösungen  $y(x)$  mit der Periode  $2k\pi$  von (1) entsprechen dann Integralen von (2), die sich bei  $k$ -maligem Umlauf um die Strecke  $-1 \leq z \leq +1$  reprodu-



zieren. Diese Integrale und die für ihr Vorhandensein notwendige und hinreichende transzendente Gleichung zwischen  $a, k^2, \nu$  werden durch die Fuchsschen Reihenentwicklungen an den singulären Stellen ausgedrückt. *F. W. Schäfke* (Mainz).

**Kasner, Edward and John de Cicco: Higher properties of physical systems of curves.** *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **36**, 119—122 (1950).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. **29**, 213, 414; **31**, 268; **34**, 89) betrachten Verff. die Differentialgleichung

$$(\Psi - y' \Phi) y''' = [\Psi_x + (\Psi_y - \Phi_x) y' - \Phi_y] y'' - \left[ 3 \Phi - \frac{2k(\Phi + y' \Psi)}{(1+k)(1+y'^2)} \right] y'^2$$

$\Psi$  und  $\Phi$  sind die Komponenten eines Kraftfeldes in der Ebene; bei der Bewegung eines Punktes der Masse Eins ist die Zentrifugalkraft  $P$  proportional der Kraftkomponente in Richtung der Kurvennormalen,  $P = kN$ . Durch jedes Linienelement gibt es eine Integralkurve und eine zugehörige Geschwindigkeit, so daß die Kurve ihren Krümmungskreis vierpunktig berührt. Für Ausnahmerichtungen ist sein Radius unendlich. Im allgemeinen gibt es in jedem Punkt zwei Ausnahmerichtungen. Für konservative Kraftfelder ist das Netz der Ausnahmekurven orthogonal. Ferner werden für die hyperoskulierenden Geschwindigkeiten einige Beziehungen hergeleitet.

*W. Haack* (Berlin).

**Terracini, Alejandro: Über die Differentialgleichungen vom Typus (G) und vom Typus (F).** *Rev. Univ. nac. Tucumán, A* **6**, 273—387 (1948) [Spanisch].

Ce travail qui continue les recherches de l'A. [*Rev. Univ. nac. Tucumán, A* **6**, 255—261 (1948)] sur les équations différentielles des types

$$(G) \quad y''' = G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2$$

$$(F) \quad y''' = F(x, y, y') + G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2$$

est consacré à la caractérisation de ces types par des propriétés géométriques présentant le caractère projectif. L'A. introduit les définitions suivantes: un système  $\Theta$  de  $\infty^3$  courbes planes est dit admettre la propriété homographique si les  $\infty^1$  courbes de  $\Theta$  qui passent par deux points fixes arbitraires  $A, B$  admettent en ces points des tangentes qui engendrent deux faisceaux homographiques;  $\Theta$  admet la propriété homologique si les faisceaux considérés sont homologiques. En supposant que  $B$  est infiniment voisin de  $A$ , on est conduit à considérer des systèmes  $\Theta$  qui n'admettent les propriétés homographique ou homologique qu'en première, seconde etc. approximation dans un sens évident. Cela posé, l'A. montre que les systèmes  $\Theta$  les plus généraux admettant en première approximation la propriété homographique ou la propriété homologique sont les solutions respectives des équations des types (F) et (G). Il détermine complètement les équations différentielles du troisième ordre dont les systèmes de courbes intégrales satisfont en seconde approximation aux propriétés étudiées — équations des types (FF) et (GG).

*Lichnerowicz* (Paris).

**Mychkis (Myškis), A.: Sur un lemme géométrique qui s'applique dans la théorie de stabilité au sens de Liapounoff.** *C. R. Acad. Sci. URSS*, n. S. **55**, 295—298 (1947).

Verf. beweist einen Hilfssatz über Eigenschaften von Bahnkurvenscharen, dessen Formulierung hier nicht wiedergegeben werden kann. Es ergeben sich Verschärfungen bzw. neue Beweise für Sätze von K. P. Persidsky [*Dissertation MGU*, 1946] und N. G. Tchetaeff [*C. R. Acad. Sci. URSS*, n. S. **1**, Nr. 9 (1934)]. *Rinow*.

## Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● **Sauter, Fritz: Differentialgleichungen der Physik.** 2. Aufl. (Sammlung Götschen Bd. 1070.) Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950. 148 S., 16 Fig.

Das Büchlein will dem mathematischen Physiker an konkreten Beispielen die Rechentechnik von Differentialgleichungen in Kürze dartun so, daß er zum eigenen

Erarbeiten des Könnens auf diesem Gebiete angeregt wird. An Vorkenntnissen wird wenig vorausgesetzt; die Gedrängtheit der Darstellung verbietet das Eingehen auf prinzipielle Fragen, wie Existenz von Lösungen und dgl. Aus dem Kreise moderner Probleme werden die Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators und die radiale Differentialgleichung des Keplerproblems ausgewählt mit Besprechung von Hermiteschen und Laguerreschen Polynomen. Die Potentialgleichungen:  $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$  bzw.  $\nabla^2 \varphi - \partial^2 \varphi / c^2 \partial t^2 = -4\pi\rho$  werden mit Hilfe von Fourierintegralsätzen gelöst. Was die letztere anlangt, so wäre nur eine Betonung darauf erwünscht, daß das avancierte Potential und das retardierte mathematisch gleichberechtigt sind.

S. C. Kar (Calcutta).

•Raševskij, P. K.: **Geometrische Theorie der partiellen Differentialgleichungen.** Moskau-Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für techn.-theoret. Literatur 1947. 354 S. R. 15.50 [Russisch].

Das vorliegende Buch behandelt in einer sehr angenehm lesbaren Weise die Theorie der Differentialgleichungen mit Hilfe der Pfaffschen Formen, wie es heute weitgehend üblich ist. Das erste Kapitel bringt eine Algebra der schiefssymmetrischen Formen mit Einführung des Ranges und der kanonischen Form, allerdings ohne die hier sehr wichtigen Nullkorrelationen zu erwähnen. Das nächste Kapitel bringt dann die alternierenden Differentialformen und das Rechnen damit, samt Ableitung des allgemeinen Integralsatzes, der die von Gauß und Stokes verallgemeinert. Darauf werden allgemeine Systeme Pfaffscher Gleichungen eingeführt, insbesondere der Fall des vollständig integrablen Systems behandelt und nach Frobenius bewiesen, daß diese Systeme durch Verschwinden der kovarianten Ableitungen gekennzeichnet sind. Nach einigen allgemeinen Betrachtungen über die Integralmannigfaltigkeiten eines Pfaffschen Systems werden dann die Klasse  $p$  und das charakteristische System eingeführt. Die Klasse ist dabei die Minimalzahl der Variablen, von denen das System abhängt, so daß das charakteristische System sich in diesen als  $dy^1 = dy^2 = \dots = dy^p = 0$  schreibt. Die Bedeutung dieser Begriffe für die Integration wird gezeigt und die Cauchysche Methode der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in die Formensprache übersetzt. Die weiteren Ausführungen gehen bald zu dem Sonderfall einer Pfaffschen Form bzw. Gleichung über, der großen Raum einnimmt. Nachdem die beiden Normalgestalten einer Form bei gerader und bei ungerader Klasse  $z_1 dy^1 + \dots + z_k dy^k$  und  $dy + z_1 dy^1 + \dots + z_k dy^k$  hergeleitet worden sind und gezeigt wurde, daß damit das Integrationsgeschäft nur noch auf die Lösung endlicher Gleichungen zurückgeführt ist, folgen 2 ausführliche Kapitel über die Geometrie der Formen gerader und ungerader Klasse, wobei insbesondere die aus der älteren Analysis bekannten Klammern von Poisson und Jacobi herangezogen werden und diejenigen Abbildungen betrachtet werden, die Normalformen wieder in solche überführen (in einem Falle lassen sich diese als Berührungstransformationen deuten). Das vorletzte Kapitel bringt einen kurzen Abriß der Finslerschen Geometrie eines Variationsproblems. Erst im letzten Kapitel 11 wird auf 63 Seiten das Integrationsproblem eines allgemeinen, nicht notwendig vollständig integrablen Pfaffschen Systems behandelt mit der Einführung der Involutionssysteme, allgemeinem Existenzsatz und Verlängerung eines Systems. Der Inhalt deckt sich ungefähr mit dem des Buchs von Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig 1934; dies. Zbl. 11, 161; nach der breiten Behandlung der einfacheren Fälle vorher dürfte das Verständnis dieser schwierigeren Dinge hier jedoch leichter sein als in dem deutschen Buch.

Bureau (Hamburg).

Martinelli, Enzo: **Un'osservazione sopra un teorema fondamentale della teoria degli integrali in una varietà topologica.** Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 348—352 (1949).



Unter zusätzlichen, erleichternden Voraussetzungen wird ein kurzer Beweis gegeben für de Rham's Satz von der Existenz einer geschlossenen (integrablen) Differentialform mit gegebenen Perioden in einer hinreichend differenzierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit. Für den Grundgedanken verweist der Verf auf eine Andeutung von de Rham: um z. B. in drei Dimensionen ein quellenfreies, etwa elektrisches, Strömungsfeld mit gegebenen Perioden (d. h. Durchflußgeschwindigkeiten durch die Flächen einer Homologiebasis) zu gewinnen, konstruiert man eine Strömung in einem linearen Leitungsnetz, die die gegebenen Perioden hat, — das ist leicht — und nähert diese Strömung durch ein stetiges Strömungsfeld an. Um diesen Grundgedanken bequem durchführen zu können, macht Verf. die folgende Annahme. Die Zyklen  $\Gamma_p^i, \Delta_{n-p}^j$  ( $i, j = 1, \dots, R_p$ ) einer Klasse  $\geq 1$  mögen eine  $p$ -dimensionale Homologiebasis und die dazu duale  $(n-p)$ -dimensionale Homologiebasis bilden;  $\Gamma_p^i$  und  $\Delta_{n-p}^j$  mögen „effektiv“ einen einzigen Punkt  $P^i$  gemein haben,  $\Gamma_p^i$  und  $\Delta_{n-p}^j$  ( $i \neq j$ ) seien „effektiv“ frei von Schnittpunkten. Durchläuft der Punkt  $\bar{P}^i$  eine genügend enge Umgebung  $\gamma_p^i$  von  $P^i$  auf  $\Gamma_p^i$ , so lasse sich  $\Delta_{n-p}^j$  in einen Zyklus  $\bar{\Delta}_{n-p}^j$  deformieren, der  $\Gamma_p^i$  nur in  $\bar{P}^i$  trifft; dabei sollen zwei verschiedene  $\bar{\Delta}_{n-p}^j$  keinen Punkt gemeinsam haben. Dem Ref. scheint diese Annahme für den weiterhin gegebenen Beweis nicht auszureichen; mindestens müßte die eindeutige und, in irgendeinem Sinne, differenzierbare Abhängigkeit des Zyklus  $\bar{\Delta}_{n-p}^j$  von  $\bar{P}^i$  gefordert werden. Bei den geschlossenen orientierbaren Flächen und ihren Produkten ist die Annahme erfüllt.

H. Kneser (Tübingen).

Fichera, Gaetano: Sull'integrazione in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado. Rev. Univ. nac. Tucumán, A 6, 51—70 (1947).

Ist in einem Gebiet  $D$  des  $r$ -dimensionalen Zahlenraumes eine alternierende Differentialform  $(k+1)$ -ten Grades ( $0 \leq k < r$ ) gegeben, die, über eine in  $D$  enthaltene geschlossene  $(k+1)$ -Mannigfaltigkeit integriert, immer Null ergibt, so ist sie integabel, d. h. das Differential einer ebensolchen Form  $k$ -ten Grades. Für diesen Satz, zu dem noch genauere Voraussetzungen gemacht werden, gibt der Verf. einen Beweis mit ziemlich elementaren Mitteln. Die Voraussetzungen betreffen die Differenzierbarkeit der Koeffizienten der gegebenen Form und besonders die Gestalt des Gebietes  $D$ : dieses soll sich in bestimmter Weise aus Teilen einfacher Gestalt zusammensetzen. Die Definitionen des Verf. weichen von den gewohnten ab, sei es versehentlich oder mit Absicht; z. B. würde nach ihrem genauen Wortlaut eine glatte verknötete Raumkurve keine „varietà regolare chiusa“ sein. Im Anfang von § III ist die mit „E'ovvio“ beginnende Bemerkung falsch, wenn man nicht z. B. die Stetigkeit der Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  voraussetzt. Auf die Orientierung der auftretenden Mannigfaltigkeiten wird nicht eingegangen, weil sie „inessenziale per il seguito“ sei. Der Ref. ist anderer Meinung, z. B. betreffs des Schlusses von § IV.

H. Kneser (Tübingen).

Gonzalez, Mario O.: Über die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, die bei Berührungstransformationen invariant sind. Rev. Univ. nac. Tucumán A 7, 109—128 (1949) [Spanisch].

In dieser Arbeit werden systematisch Differentialgleichungen 1. Ordnung mit Berührungstransformationen in sich untersucht. Zunächst wird im ersten Abschnitt das Ergebnis von Lie referiert, wonach in der Form

$$(1) \quad B = W_p \partial/\partial x + (p W_p + W) \partial/\partial y - (W_x + p W_y) \partial/\partial p$$

sich aus einer gegebenen Funktion  $W(x, y, p)$  die infinitesimale Transformation einer Gruppe von Berührungstransformationen ergibt. Es werden dann zu allen möglichen  $W$  Differentialgleichungen  $f(x, y, p) = 0$  gesucht, die mit  $f = 0$  auch  $Bf = 0$  nach sich ziehen, d. h. die durch (1) erzeugte Gruppe in sich gestatten.

Zu gegebenem  $B$  werden nun invariant bleibende Differentialgleichungen in der Form  $f(u, v) = 0$  ( $u$  und  $v$  Funktionen von  $x, y, p$ ) gesucht. Diese werden gefunden, wenn man für  $u$  und  $v$  solche Funktionen setzt, daß durch  $u(x, y, p) = c$  und  $v(x, y, p) = c'$  das System  $\frac{dx}{W_p} = \frac{dy}{p W_p - W} = \frac{dp}{-W_x - p W_y} = \frac{dW}{-W W_y}$  gelöst wird. Es werden zu 20 verschiedenen Typen von  $W$  (z. B. nur von  $x$  oder nur von  $y$  abhängig usw.) entsprechende Differentialgleichungen angegeben. Vermittels eines Satzes ergeben sich aus einem so gefundenen integrierbaren Typ unendlich viele weitere. Das nächste Kapitel behandelt dann die schwierigere Aufgabe, zu einer gegebenen Differentialgleichung zugehörige Operatoren zu finden. Lautet die gegebene Differentialgleichung  $u - F(v) = 0$ , so gelingt es unter gewissen Voraussetzungen, für die Ableitungen der Funktionen  $u, v$  und ihrer Funktionaldeterminanten charakteristische  $W$  und damit zugehörige Operatoren (1) zu finden. Im letzten Abschnitt wird erläutert, wie man zu gegebener Differentialgleichung mit bekannten Transformationen in sich durch Einführung neuer Variablen  $X, Y, P$ , die mit  $x, y, p$  durch eine Berührungstransformation zusammenhängen, erreichen kann, daß der Operator jetzt nur noch zu einer erweiterten Punktttransformation gehört. An einem Beispiel wird gezeigt, wie hierdurch die Integration erleichtert wird.

Bureau (Hamburg).

**Inzinger, Rudolf:** Berührungsinvarianten von Elementvereinen. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 149—152 (1949).

Verf. interessiert sich für die Gesamtheit der Berührungstransformationen des  $R_3$ , die ein festes Element erster Ordnung  $E$  (d. h. Punkt und Ebene vereinigt) invariant lassen, speziell für die Wirkung dieser Transformationen auf die durch  $E$  gehenden Elemente 2. Ordnung. Nach Engel aus der Zeit um 1900 kann man diese Elemente 2. Ordnung durch 5 homogene Koordinaten ( $e_i$ ) mit der Bedingung (1)  $e_1 e_3 - e_2^2 - e_0 e_4 = 0$  darstellen. Hierdurch wird nicht nur der Fall eines flächenhaften Elements erfaßt, das man gewöhnlich durch  $r, s, t$  darstellt, sondern auch alle Fälle „entarteter Elemente“, die dann durch Verschwinden gewisser  $e_i$  gekennzeichnet sind. Die Berührungstransformationen, die  $E$  festlassen, induzieren im Raum der  $E$  die Gruppe  $G_{10}$  der automorphen Kollineationen, die (1) invariant lassen. Die für flächenhafte Elemente 2. Ordnung bekannte Indikatrix

$$r x^2 + 2 s x y + t y^2 = 1$$

verallgemeinert Verf. mittels der  $e_i$  zu einer stets gültigen Indikatrix, die als vollständiger Mittelpunktkegelschnitt im Sinne Studys auftritt. Es werden dann noch gewisse geometrisch wichtige Untergruppen von  $G_{10}$  angegeben. Bureau.

**Manfredi, Bianca:** Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine e totalmente lineari. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 381—390 (1949).

Ist  $\omega(x, y)$  eine Lösung der Gleichung  $\partial z / \partial x + a(x, y) \partial z / \partial y = 0$  und  $\omega_{-1}(x, y)$  eine implizit durch  $y = \omega(x, \omega_{-1})$  definierte Funktion, so hat man folgende Zerlegung

$$\frac{\partial}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + b(x, y) = \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} \exp \left( - \int b(x, \omega_{-1}) dx \right) D_x \exp \left( \int b(x, \omega_{-1}) dx \right) \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\}$$

für den links geschriebenen partiellen Differentialoperator. Dabei bedeuten  $D_x$  Derivation nach  $x$  und  $\left\{ \frac{y}{\omega} \right\}, \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\}$  Ersetzung von  $y$  durch  $\omega$  bzw.  $\omega_{-1}$ . Anwendung auf die Inversion des genannten Differentialoperators. Ausdehnung auf den Fall von mehr als zwei Veränderlichen.

G. Cimmino (Bologna).

**Millar, J. G.:** Hyperbolic function series arising from a simple potential problem. Amer. math. Monthly 57, 100—104 (1950).

Die Summe zweier Potentialfunktionen auf einem Quadrat, von denen jede



auf einem Paar paralleler Randseiten den Wert 1 hat und auf dem anderen Paar verschwindet, ist identisch 1 auf dem Quadrat. Drückt man diese zwei Potentialfunktionen durch Summen von  $\cos$ - bzw.  $\cosh$ -Funktionen aus, so erhält man eine Identität, von der spezielle Fälle aufgeschrieben werden. *H. Hornich (Graz).*

**Davies, C. N.:** The sedimentation and diffusion of small particles. *Proc. R. Soc., London, A* **200**, 100—113 (1949).

Wird eine aus kleinsten Partikeln bestehende Stoffmenge in einer Flüssigkeit oder einem Gas gelöst, so treten infolge Ausfällung und Diffusion Vorgänge auf, bei denen sich die Konzentration des gelösten Stoffes mit der Zeit und dem Ort ändert. Verf. zeigt, daß Vorgänge dieser Art unter gewissen Annahmen im Eindimensionalen durch die lineare partielle Differentialgleichung vom parabolischen Typus

$$(1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \alpha = \text{konst.}$$

beschrieben werden können ( $c$  Konzentration). Zu (1) treten außer den Anfangsbedingungen

$$(2) \quad c(x, 0) \equiv 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} c(x, t) \equiv 0, \quad 0 < x < 1$$

noch die Randbedingungen

$$(3) \quad \alpha c_x(0, t) \equiv c(0, t), \quad c(1, t) \equiv 0, \quad t > 0$$

hinzu, durch die Ebene  $x = 0$  treten keine Partikel hindurch, und die Ebene  $x = 1$  ist ein vollkommener Adsorbierer. Ist jede der Ebenen  $x = 0$  und  $x = 1$  ein vollkommener Adsorbierer, so ist (3) durch

$$(4) \quad c(0, t) \equiv c(1, t) \equiv 0, \quad t > 0$$

zu ersetzen. — Die Lösung dieser beiden Randwertaufgaben wird einmal durch Entwicklung nach Eigenfunktionen dargestellt, das andere Mal mit Hilfe einer Integraldarstellung. Die Lösung der Randwertaufgabe (1), (2), (3) ist

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8\alpha^2}{1 + 2\alpha + \operatorname{tg}^2 p_i} \left( \frac{\sin p_i}{\alpha} + p_i e^{-1/2\alpha} \right) \exp \frac{2x - (1 + 4\alpha^2 p_i^2)t}{4\alpha} \sin p_i (1 - x),$$

worin die  $p_i$  die positiven Nullstellen der Funktion  $\operatorname{tg} p - \alpha p$  bedeuten; die Integraldarstellung der Lösung ist

$$c = \frac{1}{2} (\pi \alpha t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma) \exp \frac{-(\gamma - x + t)^2}{4\alpha t} d\gamma.$$

Hierin ist  $f(x) \equiv c(x, 0)$  gemäß den Randbedingungen (3) in geeigneter Weise über das Intervall  $0 < x < 1$  hinaus fortzusetzen. Die Lösung der Randwertaufgabe (1), (2), (4) ist

$$c = \sum_{s=1}^{\infty} C_s \exp \frac{2x - (1 + 4s^2 \pi^2 \alpha^2)t}{4\alpha} \sin s\pi x$$

mit

$$C_s = \frac{2}{s\pi} \frac{1 - (-1)^s e^{-1/2\alpha}}{1 + 1/4 s^2 \pi^2 \alpha^2} \quad (s \text{ nat. Zahl}).$$

Die Integraldarstellung ist dieselbe wie bei der ersten Randwertaufgabe, nur ist die Funktion  $f(x) \equiv c(x, 0)$  nunmehr gemäß den Randbedingungen (4) fortzusetzen. Verf. teilt abschließend einige numerische Ergebnisse mit, u. a. eine Tafel der Zahlen  $p_i$ . *Quade (Hannover).*

Levinson, Norman: The first boundary value problem for

$$\varepsilon \Delta u + A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = D(x, y)$$

for small  $\varepsilon$ . Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 428—445 (1950).

Es sei  $u(x, y, \varepsilon)$  die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Gleichung

$$(1) \quad \varepsilon \Delta u + A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = D(x, y);$$

Verf. stellt sich die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, y, \varepsilon)$  und gewis-

sen Lösungen der Gleichung (2)  $A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = D(x, y)$  aufzudecken. Es werden folgende Annahmen gemacht: Es sei  $R$  ein offenes (einfach oder mehrfach zusammenhängendes) Gebiet der  $x, y$ -Ebene, und es bestehe die Berandung  $S$  aus einer endlichen Anzahl einfach geschlossener Kurven;  $R + S$  liege in einem offenen Gebiet  $R_0$ . In  $R_0$  seien  $A, B, C, D$  samt den partiellen Ableitungen bis zur sechsten Ordnung stetig, ferner sei  $S$  durch sechsmal stetig differenzierbare Funktionen gegeben. Weiterhin existiere in  $R_0$  eine Funktion  $I'(x, y)$ , für die dort  $A I'_x + B I'_y > 0$  gilt; diese letzte Bedingung kann durch  $C < 0$  ersetzt werden. Es wird weiter angenommen, daß die Charakteristiken von (2) einen gewissen Bogen  $S_1$  von  $S$  unter einem von Null verschiedenen Winkel schneiden und das Gebiet  $R$  durch einen Bogen  $S_2$  ebenfalls nicht tangential verlassen. Es sei schließlich  $T$  dasjenige einfach zusammenhängende Gebiet, das durch  $S_1, S_2$  und durch die die Endpunkte verbindenden Charakteristiken begrenzt wird. — Verf. beweist nun folgenden Satz: Es sei  $U(x, y)$  eine Lösung von (2), die auf  $S_1$  die Randwerte  $u$  der zu (1) gehörigen ersten Randwertaufgabe annimmt. Dann ist in  $T$   $u(x, y, \varepsilon) = U(x, y) + z(x, y, \varepsilon) + w(x, y, \varepsilon)$  mit  $w = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ ;  $z$  hat in der Nachbarschaft von  $S_2$  die Gestalt  $z = e^{-g(x, y)/\varepsilon} h(x, y)$  ( $g, h$  bekannte Funktionen mit  $g = 0$  auf  $S_2$ ,  $g > 0$  außerhalb  $S_2$ ). Für den Teil von  $T$ , in dem  $z$  nicht diese Darstellung gestattet, gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß dort  $z = O(e^{-\delta/\varepsilon})$  ist. Im Laufe des Beweises ergibt sich u. a. das folgende Maximumprinzip: Ist  $|D| \leq m$  in  $R + S$  und  $|u| \leq m$  auf  $S$ , so gibt es eine von  $\varepsilon$  unabhängige Konstante  $K$ , so daß in  $R$   $|u| \leq Km$  gilt. Maruhn (Dresden).

Pleijel, Åke: Asymptotic relations for the eigenfunctions of certain boundary problems of polar type. Amer. J. Math. 70, 892—907 (1948).

Es sei  $V$  ein beschränktes Gebiet mit dem Rand  $S$  im Euklidischen Raume  $(x_1, x_2, x_3)$ . Betrachtet wird das Eigenwertproblem

$$\Delta u - p(x_1, x_2, x_3) u + \lambda q(x_1, x_2, x_3) u = 0 \text{ in } V$$

mit den Randbedingungen  $u = 0$  auf  $S$  oder  $\partial u / \partial \nu = 0$  auf  $S$ . Es werden  $p, q, \partial p / \partial x_i, \partial q / \partial x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) als stetig vorausgesetzt. Außerdem sei  $p \geq 0$ .  $q$  darf sein Vorzeichen in  $V$  wechseln. In diesem Fall gibt es unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} |\lambda_i| = \infty$ . Die Eigenfunktionen

erfüllen die Normierungsbedingungen

$$\int_V q(P) \varphi_i(P) \varphi_k(P) dV = \begin{cases} \operatorname{sgn} \lambda_i & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$

Die Greensche Funktion des oberen Differentialausdrucks werde mit  $G(P, Q; \lambda)$  bezeichnet. Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Herleitung der asymptotischen Darstellung

$$\lim_{Q \rightarrow P} (G(P, Q; i y) - G(P, Q; 0))$$

$$= [(-1 + i \operatorname{sgn} q(P)) \{ \frac{1}{2} |q(P)| \}^{1/4} \pi] y^{\frac{1}{2}} + O(1) \text{ für } y \rightarrow +\infty \text{ und } q(P) \neq 0.$$

Dies wird erreicht, indem man gewisse Variationsprobleme untersucht. Aus dieser asymptotischen Darstellung resultiert dann die Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_n^2(P)}{|\lambda_n| (\lambda_n - i y)} = \{ [\operatorname{sgn} q(P) + i] [\frac{1}{2} |q(P)|]^{1/2} / 4\pi \} y^{-1/2} + O(y^{-1}) \text{ für } y \rightarrow +\infty.$$



Hieraus folgen durch Anwendung Tauberscher Sätze die gewünschten asymptotischen Ausdrücke für die Eigenfunktionen, nämlich

$$0 < \lambda_n < T \quad \varphi_n^2(P) = [q_+^{1/2}(P)/6\pi^2] T^{3/2} + o(T^{3/2})$$

und

$$-T < \lambda_n < 0 \quad \varphi_n^2(P) = [q_-^{1/2}(P)/6\pi^2] T^{3/2} + o(T^{3/2}) \text{ für } q(P) \neq 0.$$

Dabei ist  $q_+(P) = \frac{1}{2}(|q(P)| + q(P))$ ,  $q_-(P) = \frac{1}{2}(|q(P)| - q(P))$  gesetzt.

Heinz Rellich (Göttingen).

**Brelot, Marcel:** Étude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point singulier. Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble **1**, 121—156 (1950).

Die Hadamardsche Produktdarstellung einer ganzen Funktion liefert durch Logarithmen ihres Betrages die Darstellung einer in  $|z| < \infty$  harmonischen Funktion mit vorgeschriebenen negativen logarithmischen Polen ganzzahliger Gewichte. Die so aufgefaßte Hadamardsche Theorie wird vom Verf. auf subharmonische Funktionen in Räumen der Dimension  $\tau \geq 2$  übertragen [vgl. auch W. R. Transue, Amer. J. Math. **65**, 335—340 (1943)].  $O$  sei fest,  $P$  und  $Q$  variabel,  $OP = p$ ,  $OQ = q$ ,  $h(r) = r^{2-\tau}$  ( $\tau > 2$ ),  $h(r) = \lg r$  ( $\tau = 2$ ) und

$$H_s(P, Q) = h(P, Q) - h(q) - \sum_{n=1}^s Z_n^{(\tau)}(\cos \widehat{POQ}) \cdot \frac{p^n}{q^{\tau-2+n}},$$

$\mu$  sei ein negatives Maß in  $OP > 1$ ,  $\varrho > 0$  und  $s$  die größte ganze Zahl  $< \varrho$ . — Ist  $q^{2-\tau-\varrho} \mu_Q$  integrierbar, so existiert das Integral

$$v(P) = \int H_s(P, Q) d\mu_Q$$

und stellt eine subharmonische Funktion dar mit  $v^+(P) = o(p^\varrho)$  für  $p \rightarrow \infty$ . Andere Schranken für das Maß  $\mu$  liefern analoge Resultate. Dabei besteht zwischen ganzem und nichtganzem  $\varrho$  ein wesentlicher Unterschied, der übrigens von der Theorie der ganzen Funktionen her bekannt ist. Die für ganze  $\varrho$  zusätzlichen Bedingungen erinnern an Sätze von E. Lindelöf [Ann. sci. Ecole norm. sup. II. S. **22**, 369—395 (1905)]. — Ist umgekehrt  $u(P)$  in  $OP > 1$  subharmonisch,  $\mu$  das zugehörige Maß,  $M(r)$  der Mittelwert von  $u^+$  auf  $OP = r$  und ist  $r^{-(\varrho+1)} \cdot M(r)$  integrierbar, so gilt  $u(P) = v(P) + \text{harm. Funktion in } OP > 1$ ; insbesondere folgt dann  $u^+(P) = o(p^\varrho)$ . Auch die Bedingung  $M(r) = O(r^\varrho)$  liefert ähnliche Resultate. Einige Sonderfälle ( $\varrho \leq 1$ ) werden eingehend diskutiert. Für  $\varrho < 1$  vgl. M. Heins (dies. Zbl. **29**, 298). Bemerkung des Ref.: Daß aus Wachstumsschranken für  $M(r)$  entsprechende Wachstumsschranken für  $u^+$  folgen, wie vom Verf. bewiesen wurde, kann mit viel einfacheren Mitteln gezeigt werden.

Pfugler (Zürich).

**Brelot, M.:** Remarque sur le prolongement fonctionnel linéaire et le problème de Dirichlet. Acta Sci. math., Szeged **12 B**, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 150—152 (1950).

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $R^\tau$  ( $\tau \geq 2$ ), de frontière  $\bar{\Omega}^*$ . Soient  $C$  l'ensemble des fonctions continues définies sur  $\bar{\Omega}^*$  et  $F$  l'ensemble des fonctions de  $C$  pour lesquels le problème de Dirichlet (pour  $\Omega$ ) admet une solution au sens classique. A toute  $f \in C$  on associe trois fonctions harmoniques dans  $\Omega$ :  $H_f$ , fonction de Wiener (solution du problème de Dirichlet généralisé avec donnée-frontière  $f$ ),  $D_f$ , plus petite majorante harmonique de la fonction sousharmonique continue  $\text{Sup } H_\varphi$  ( $\varphi \leq f, \varphi \in F$ ), enfin  $\bar{D}_f$ , qui se définit d'une manière analogue. — Dans cet article l'identité des trois fonctions précédentes est établie. La démonstration repose sur un théorème d'unicité de M. Keldyich [C. r. Acad. Sci. URSS, n. S. **32**, 308—309 (1941)] et suggère des extensions du théorème de Hahn-Banach sur le prolongement d'une fonctionnelle linéaire, celle-ci étant remplacée par une application linéaire sur un espace vectoriel convenablement ordonné. Noter qu'au milieu de la page 151 (lignes 22 et 23) il faut permuter les mots „inférieure“ et „supérieure“.

Deny (Strasbourg).

**Cartan, Henri:** Théorie générale du balayage en potentiel Newtonien. Ann. Univ. Grenoble, II. S. 22, 221—280 (1947).

Die von H. Poincaré stammende Methode der „Auskehrung“ (balayage) war ursprünglich zur Lösung des Dirichletschen Problems der Potentialtheorie bestimmt; seither ist diese Methode in einer großen Anzahl von Arbeiten (von de la Vallée-Poussin, N. Wiener, Brelot, Frostman, Monna u. a.) weiterentwickelt und von großer Bedeutung auch für die komplexe Funktionentheorie geworden. Die vorliegende Arbeit liefert eine schöne systematische Darstellung dieses Gebietes, die trotz ihres großen Umfanges freilich nicht alle aufgetretenen Gesichtspunkte berücksichtigen konnte; das Literaturverzeichnis enthält nur 18 Nummern. — Die Darstellung beginnt mit dem Radonschen Maß, bzw. Integral von Funktionen, dem Newtonschen Potential, dem Begriff einer sphärischen Massenverteilung und der wechselseitigen „Energie“ zweier Verteilungen; es folgen die überharmonischen Funktionen, die Energie einer Verteilung, die Norm und der Raum der Verteilungen von endlicher Energie, sowie Konvergenzbetrachtungen. Es folgt die „balayage“ bei Verteilungen von endlicher Energie und weiter die Theorie der Kapazität, die Erweiterung auf allgemeine Verteilungen, die regulären und irregulären Punkte und das Kriterium von N. Wiener.

H. Hornich (Graz).

**Frostman, Otto:** Potentiel de masses à somme algébrique nulle. Kungl. fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 20, Nr. 1, 21 S. (1950).

Soit, dans l'espace euclidien  $R^m$  à  $m$  dimensions,  $U_\alpha^\mu(x) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int |x-y|^{\alpha-m} d\mu(y)$  le potentiel d'ordre  $\alpha$  ( $0 < \alpha < m$ ) engendré par la mesure  $\mu$  à support compact (on se bornera à de telles mesures), avec  $H_m(\alpha) = \pi^{m/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) \Gamma((m-\alpha)/2)$ . L'auteur établit la formule suivante, valable pour  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $m < \alpha + \beta < m + 2$ :

$$(1) \quad \int \left[ U_\alpha^\mu(z) - \frac{M}{H_m(\alpha)} |z|^{\alpha-m} \right] \left[ U_\beta^\nu(z) - \frac{N}{H_m(\beta)} |z|^{\beta-m} \right] dz \\ = \frac{1}{H_m(\alpha+\beta)} \iint (|x-y|^{\alpha+\beta-m} - |x|^{\alpha+\beta-m} - |y|^{\alpha+\beta-m}) d\mu(x) d\nu(y)$$

où  $M = \int d\mu$ ,  $N = \int d\nu$ . Pour  $M = N = 0$ , (1) a donc le même aspect que la formule fondamentale de M. Riesz [Acta Litt. Sci. Univ., Szeged, Sect. Sci. math. 9, 1—42 (1938); ce Zbl. 18, 307] qui était utilisée seulement pour  $\alpha + \beta < m$  (le cas intermédiaire  $\alpha + \beta = m$  fait intervenir les logarithmes). — La majeure partie de l'article est consacrée au cas particulier important  $m = 3$ ,  $\alpha = \beta = 2$  ( $U_\frac{2}{3}^\mu = U^\mu$  est, au facteur  $\frac{1}{4}\pi$  près, le potentiel newtonien engendré par  $\mu$ ). Pour  $\mu \equiv \nu$  le second membre de (1) est une forme quadratique définie positive de  $\mu$ . En posant

$$\|\mu\| = \left( -\frac{1}{8\pi} \iint (|x-y| - |x| - |y|) d\mu(x) d\mu(y) + M^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \left( \int \left[ U^\mu - \frac{M}{4\pi} |x|^{-1} \right]^2 dx + M^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

on introduit donc une nouvelle norme, distincte de la norme-énergie

$$\|\mu\|_e = \left( \frac{1}{4\pi} \iint |x-y|^{-1} d\mu(x) d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

utilisée systématiquement par H. Cartan [Bull. Soc. math. France 73, 74—106 (1945)]. Si  $\mu$  est portée par un compact  $K$ , on a  $\|\mu\| \leq k \|\mu\|_e$ , où la constante  $k$  ne dépend que de  $K$ . La complétion de l'espace (hilbertien) des  $\mu$  portées par  $K$ , normées par  $\|\mu\|$ , fait intervenir les distributions généralisées de L. Schwartz (le cas de la norme-énergie a été étudié par le rapporteur; cf. J. Deny, ce Zbl. 34, 362). — La norme  $\|\mu\|$  est d'un maniement commode, grâce à la continuité du noyau correspondant. Applications: 1. Si la suite  $\mu_n$  de mesures portées par le compact fixe  $K$  converge faiblement (vaguement) vers  $\mu$ ,  $U^{\mu_n} - (M_n/4\pi) |x|^{-1}$  converge en moyenne quadratique (dans  $R^3$ ) vers  $U^\mu - (M/4\pi) |x|^{-1}$  ( $M_n = \int d\mu_n$ ,  $M = \int d\mu$ ). 2. Soit  $\delta$  la



masse-unité placée en  $x_0$ , point d'un domaine borné  $D$  qui satisfait à la condition de Poincaré en tout point frontière. Parmi les mesures  $\mu \geq 0$  portées par l'adhérence  $D$  et telles que  $U^{\delta-\mu} \geq 0$  partout,  $U^{\delta-\mu} = 0$  sur  $C\bar{D}$ , il en existe une et une seule pour laquelle  $\|\delta - \mu\|^2 = \int (U^{\delta-\mu})^2 dx$  est maximum; cette  $\mu$  est portée par la frontière, et  $U^{\delta-\mu}$  n'est autre que la fonction de Green relative à  $D$  et  $x_0$ . — L'article comprend également une étude détaillée des potentiels engendrés par des distributions dipolaires [potentiels de la forme  $W(x) = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} |x - y|^{-1} d\mu_i(y)$ ] et plus particulièrement des potentiels de double couche. Divers résultats, qui ne peuvent être rapportés ici faute de place, sont obtenus par dérivation de la formule de M. Riesz généralisée.

*Deny* (Strasbourg).

**Parreau, Michel:** La théorie du potentiel sur les surfaces de Riemann à frontière positive. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 914—916 (1950).

L'A. étend aux surfaces de Riemann possédant une fonction de Green la théorie moderne du potentiel développée en espace euclidien (fonctions sousharmoniques et leur convergence, capacité, balayage ou extrémisation). Presque tout dérive en effet de raisonnements locaux et la correspondance conforme conserve les notions étudiées. Je ferai remarquer que l'on peut, grâce à ce caractère local, faire l'extension à d'autres espaces comme les espaces métriques connexes localement euclidiens (pourvus d'une fonction de Green) à  $n \geq 2$  dimensions.

*Brelot* (Grenoble).

**Diaz, J. B. and Alexander Weinstein:** Schwarz' inequality and the methods of Rayleigh-Ritz and Trefftz. J. Math. Phys., Massachusetts **26**, 133—136 (1947).

Verff. beweisen sehr einfach mit Hilfe der Greenschen Formel und der Schwarzschen Ungleichung die dem Dirichletschen Problem entsprechenden bekannten Beziehungen  $D(u) \leq D(w)$  ( $D$  das Dirichletsche Integral bezüglich des Gebietes  $R$ ,  $\Delta u = 0$ ,  $w$  hat stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und stimmt auf dem Rand  $C$  von  $R$  mit  $u$  überein) und  $D(\lambda v) \leq D(u)$  mit  $\lambda = \frac{1}{D(v)} \int_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds$  ( $v$  hat

stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung). Als Beispiel dafür, daß diese Methode auch bei anderen Randwertaufgaben Schranken für das Dirichletsche Integral liefert, wird das Neumannsche Problem für  $\Delta u = 0$  betrachtet. Es gilt  $\frac{1}{D(v)} \left[ \int_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds \right]^2 \leq D(u)$  ( $v$  wie oben) und  $D(u) \leq \int_R (w_1^2 + w_2^2) dx dy$ , wobei  $w_1$  und  $w_2$  den Beziehungen  $\partial w_1 \partial x + \partial w_2 \partial y = 0$  in  $R$  und  $w_1 n_x + w_2 n_y = \partial u / \partial n$  auf  $C$  ( $n_x, n_y$  Normalkomponenten der Außennormalen) genügen.

*Maruhn* (Dresden).

**Reade, Maxwell O.:** Harmonic polynomials. Duke math. J. **16**, 627—631 (1949).

In Weiterführung einer Arbeit von W. Gustin [dies. Zbl. **35**, 188], die eine nichtlineare Charakterisierung der Potentialfunktionen enthält, wird hier gezeigt: Ist  $f(z)$  reell und stetig für  $|z| < 1$ ,  $n \geq 2$  eine ganze Zahl und sind  $\zeta_m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) die Eckpunkte eines festen regulären  $n$ -Ecks mit  $|\zeta_m| = 1$ , so ist das Bestehen der Gleichung

$$\sum_{m=1}^n f(z + \alpha \zeta_m) f(z + \beta \zeta_m) = \sum_{m=1}^n [f(z + \gamma \zeta_m)]^2$$

mit  $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$  für alle reellen nichtnegativen  $\alpha, \beta$ , für die  $z + \alpha \zeta_m$  und  $z + \beta \zeta_m$  im Einheitskreis liegen, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $f(z)$  ein harmonisches Polynom in  $x, y$  ( $z = x + iy$ ) ist vom Grade  $\frac{n}{2}$  bzw.  $\frac{n-3}{2}$ .

*H. Hornich* (Graz).

#### Variationsrechnung:

**Hestenes, Magnus R.:** An elementary introduction to the calculus of variations. Math. Mag., Texas **23**, 249—267 (1950).

**Hestenes, Magnus R.:** Sufficient conditions for multiple integral problems in the calculus of variations. *Amer. J. Math.* **70**, 239—276 (1948).

L'A. étudie le problème isopérimétrique classique dans le cas d'une fonction inconnue: minimiser l'intégrale

$$\int_S f\left(x_1, x_2, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

dans une classe de fonctions  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ayant des valeurs données sur la frontière de  $S$  et satisfaisant à  $r$  conditions de la forme

$$\int_S f_\sigma\left(x_1, x_2, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_m = k_\sigma.$$

Il obtient des conditions suffisantes pour le minimum fort, qui ont la même généralité que celles qu'il a obtenues antérieurement [*Trans. Amer. math. Soc.*, **60** (1946) et ce *Zbl.* **32**, 20] pour le problème analogue relatif aux intégrales simples. Il utilise la même méthode (méthode indirecte) qui, parmi les méthodes connues, semble être la seule applicable au présent problème. Des conditions pour le minimum fort, il déduit des conditions pour le minimum faible. — L'A. se propose de poursuivre dans un Mémoire ultérieur l'étude de la variation seconde et des conditions sous lesquelles elle est définie positive.

*Dufresnoy* (Bordeaux).

**Giannopoulos, A. I.:** Die Bedingungen des Problems der Variationsrechnung. *Bull. Soc. math. Grèce* **14**, 129—132 (1949) [Griechisch].

Kurzer Beweis der Tatsache, daß die notwendigen Bedingungen des einfachen Variationsproblems

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx = \text{Minimum}$$

für das Vorhandensein eines starken Minimums, wie dies seit Weierstraß bekannt ist, nicht ausreichen.

*Dinghas* (Berlin).

**Popoff, Kyrille:** Sur une propriété des extrémales et le théorème de Jacobi. *C. r. Acad. Sci., Paris* **230**, 1032—1033 (1950).

L'A. considera la famiglia di quelle estremali, relative all'integrale  $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx$ , che sono prossime a un'estremale  $P_1 P_2$ , e rileva in qual modo, deformando un opportuno parallelogrammo articolato, si possono ottenere i punti coniugati di  $P_1$  sull'estremale  $P_1 P_2$  come ulteriori intersezioni di  $P_1 P_2$  con un'estremale infinitamente vicina.

*S. Cinquini* (Pavia).

**Stampacchia, Guido:** Gli integrali doppi del calcolo delle variazioni, in forma ordinaria. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 8, 21—26 (1950).

Si considerano gli integrali doppi in forma ordinaria sotto un aspetto più ampio, lasciando indeterminata la natura degli elementi differenziali da cui dipende la funzione integranda. Sotto condizioni per le quali rinviando al lavoro in esame, l'A. stabilisce l'esistenza del minimo assoluto attenendosi al metodo diretto del Tonelli.

*S. Cinquini* (Pavia).

**Giuliano, Landolino:** Sulla continuità degli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni. III. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 7, 76—80 (1949).

L'A. comunica i risultati raggiunti in una propria Memoria già recensita (questo *Zbl.* **33**, 278).

*S. Cinquini* (Pavia).

**Viola, Tullio:** L'integrale in forma ordinaria, alla frontiera d'un campo dello spazio funzionale lagrangiano del prim'ordine. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 6, 673—679 (1949).



Si considera il problema dell'estremo dell'integrale  $J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$ , alla frontiera di un campo funzionale  $E$  definito nel seguente modo: Sia

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b; \quad a \leq x'_1 < x'_2 < \dots < x'_n \leq b,$$

[ove  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$  oppure  $m \geq 2$ ,  $n = 0$ , e non si esclude che alcuni o tutti i punti  $x_i$  possano coincidere con gli  $x'_j$ ], e si prefissino  $2(m+n)$  costanti  $p_i, P_i, p'_j, P'_j$  con  $p_i \leq P_i, p'_j \leq P'_j$ . Il campo funzionale  $E$  è costituito da tutte e sole le funzioni  $y(x)$  continue in  $(a, b)$  insieme con le proprie derivate del primo ordine per le quali è

$$p_i \leq y(x_i) \leq P_i; \quad p'_j \leq y'(x'_j) \leq P'_j \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n),$$

e tali che esista un'unica funzione  $L(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) quasi-continua, integrabile e non negativa in modo che le derivate seconde delle  $y(x)$  esistano in quasi-tutto  $(a, b)$  e soddisfino alla disuguaglianza  $|y''(x)| \leq L(x)$ . Ciò premesso, sia  $E^0$  l'insieme formato da quelle funzioni  $y = \varphi(x)$  di  $E$  che si ottengono suddividendo  $(a, b)$  in un numero finito di intervalli parziali e ponendo in questi alternativamente

$$\varphi''(x) = L(x), \quad \varphi''(x) = -L(x).$$

Rilevando che se l'integrale  $J[\varphi] = \int_a^b f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx$  ammette massimo (o minimo) assoluto in  $E^0$ , questo valore coincide con il massimo (minimo) assoluto di  $J[y]$  in  $E$ , l'A. enuncia una condizione sufficiente, affinché  $J[y]$  raggiunga massimo (o minimo) assoluto in  $E$ , in corrispondenza a una certa funzione  $\varphi(x)$  di  $E^0$ .

S. Cinquini (Pavia).

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Miles, John W.: On certain integral equations in diffraction theory. J. Math. Phys., Massachusetts 28, 223—226 (1950).

In den letzten Jahren sind verschiedentlich akustische oder elektromagnetische Beugungsprobleme durch Zurückführung auf Integralgleichungen behandelt worden. So führt z. B. die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle am Spalt, wenn ihre magnetische Feldstärke parallel zum Spalt ist, auf die Integralgleichung

$$k \int_1^1 d\zeta H_0^{(1)}(k|x-\zeta|) f(\zeta) = 2 \exp(ikx \cos \Theta) \quad \text{für } |x| < 1, \\ f(x) = 0 \quad \text{für } |x| > 1,$$

in der  $f(x)$  die in der Spaltebene liegende Komponente der elektrischen Feldstärke bedeutet. Durch Einführung der Fourier-Transformierten  $F(\lambda)$  von  $f(x)$  entsteht hieraus die neue Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda [1 - (\lambda/k^2)]^{-\frac{1}{2}} F(\lambda) \exp(i\lambda x) = \exp(ikx \cos \Theta) \quad \text{für } |x| < 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F(\lambda) \exp(i\lambda x) = 0 \quad \text{für } |x| > 1.$$

Setzt man in diese Integralgleichungen (oder in die entsprechenden Integralgleichungen für die Beugung am Streifen) die bekannten Lösungen in Gestalt von Reihenentwicklungen nach Mathieuschen Funktionen (vgl. B. Sieger, Ann. Phys. 27, 626 (1908)) ein, so ergeben sich mehrere Integralbeziehungen zwischen Mathieuschen Funktionen.

J. Meixner (Aachen).

Ivanov, V. K.: Die verallgemeinerte Fourier-Transformation in der Operatorenrechnung. Mat. Sbornik, n. S. 23, 383—398 (1948) [Russisch].

Verf. versucht, den Mangel allgemein verwendbarer notwendiger und hinreichender Gültigkeitsbedingungen bei formalen Operationen mit Fouriertransformationen und Differentiationen zu überwinden durch Erweiterung des üblichen Funk-

tionsbegriffes. Es sei  $L = L_1(-\infty, +\infty)$ ,  $Qf(x) = xf(x)$ ,  $P = i(d/dx)$ , also formal  $PQ - QP = i$ ;  $M$  die Menge aller  $g(x) = (Q - i)^k f(x)$  mit  $k = 0, 1, \dots$  und  $f \in L$ . Aus  $M$  entsteht  $N$  durch Hinzufügung der „Quasifunktionen“  $h$ , die formal durch  $h = (P - i)^n g$  mit  $g \in M$ ,  $Pg \notin M$ ,  $n = 1, 2, \dots$  erklärt sind.

In  $L$  werden  $T$  und  $T'$  durch  $Tf = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y) dy$ ,  $T'f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y) dy$

definiert. Mittels formaler Vertauschungsrelationen lassen sich durch Induktion nach  $k$  und  $n$   $Q, P, T, T'$  auf ganz  $N$  erklären, und es ist dort  $TT' = T'T = 1/2\pi$ ,  $TP = QT$ ,  $PQ - QP = i$ . — Für eine weite Klasse von Funktionen  $\varphi(x)$  sind auch  $\varphi(P)$  und  $\varphi(Q)$  in ganz  $N$  sinnvoll; es ist  $\varphi(P)g = (T'\varphi) * g$ , wo  $*$  Faltung bedeutet. — Nach Ausdehnung auf mehrere Veränderliche wird als Beispiel die Lösung einer zeitabhängigen Wellengleichung in  $n$  Dimensionen durchgeführt. — Die Arbeit fußt auf G. A. Grünberg, N. M. Gunther und A. I. Plessner, ist aber anscheinend unabhängig von L. Schwartz (dies. Zbl. 30, 126), dessen Arbeiten fast die gleichen Ziele, Methoden und Ergebnisse haben. Jedoch kommt Verf. ganz ohne Topologie aus und arbeitet auch mit Hermiteischen Operatoren und Resolventen, ohne ein inneres Produkt zu benutzen. *Wecken* (Haltingen).

**Tranter, C. J.:** Legendre transforms. Quart. J. Math. (Oxford II. S.) 1, 1—8 (1950).

In Analogie zu der „endlichen Fourier-Transformation“  $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{inx} dx$  und

ihren Spezialfällen, der endlichen cos- bzw. sin-Transformation  $\int_0^{\pi} f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx dx$ ,

führt der Verf. die Legendre-Transformation  $\bar{V}_n = \int_{-1}^{+1} V(\mu) P_n(\mu) d\mu$  und ihre Ab-

arten, die ungerade Legendre-Transformation  $\bar{V}_{2n+1} = \int_0^1 V(\mu) P_{2n+1}(\mu) d\mu$  und die

gerade Legendre-Transformation  $\bar{V}_{2n} = \int_0^1 V(\mu) P_{2n}(\mu) d\mu$  ein, wo die  $\bar{V}$  Funk-

tionen von  $n$ , also Folgen sind. Auf Grund der Orthogonaleigenschaften der Legendreschen Polynome ergeben sich die Umkehrformeln:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3) \bar{V}_{2n+1} P_{2n+1}(\mu) \quad \text{bzw.} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \bar{V}_{2n} P_{2n}(\mu).$$

Die ungerade Transformation wird dazu benutzt, um die Laplacesche Gleichung im Halbraum  $z > 0$  zu integrieren unter der Randbedingung, daß auf der Oberfläche  $z = 0$  im Innern des Kreises  $\varrho = a$  die Gleichung  $\partial V / \partial z = f(\varrho)$  und im Äußern  $V = F(\varrho)$  gilt, ein Problem, das J. W. Nicholson, Philos. Trans. R. Soc. London (A) 224, 49—93 (1924) stellte, ohne es lösen zu können. Durch die Koordinatentransformation  $z = a\mu\zeta$ ,  $\varrho = a(1-\mu^2)^{1/2}(1+\zeta^2)^{1/2}$  nimmt die Laplacesche Gleichung die Form an:  $\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (1+\zeta^2) \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right\} = 0$  ( $0 < \mu < 1, \zeta > 0$ ), während die Randbedingungen lauten:

$$\frac{1}{a\mu} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = f(a\sqrt{1-\mu^2}) \quad \text{für } \zeta = 0, \quad V = F(a\sqrt{1+\zeta^2}) \quad \text{für } \mu = 0.$$

Wegen der folgenden Eigenschaft der Legendre-Transformation:

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right\} P_m(\mu) d\mu = -P_m(0) \left[ \frac{\partial V}{\partial \mu} \right]_{\mu=0} + m P_{m-1}(0) [V]_{\mu=0} - m(m+1) \bar{V}_m$$

geht bei Anwendung der Legendre-Transformation die partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche über, die den unbekannten Wert von  $\partial V / \partial \mu$  für  $\mu = 0$  enthält,



der aber dadurch eliminiert werden kann, daß  $m = 2n + 1$  gesetzt wird ( $P_{2n+1}(0) = 0$ ). Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung läßt sich vermittels der von Nicholson eingeführten Harmonischen  $p_n(x)$ ,  $q_n(x)$  in der Form  $\bar{V}_{2n+1} = A_{2n+1}(\zeta) p_{2n+1}(\zeta) + B_{2n+1}(\zeta) q_{2n+1}(\zeta)$  darstellen, und die Umkehrformel liefert  $V$ . In ähnlicher Weise kann das Problem, bei dem im Innern des Kreises  $V = F(\varrho)$  und im Äußern  $\partial V / \partial z = f(\varrho)$  vorgeschrieben ist, vermittels der geraden Legendre-Transformation gelöst werden. Die wie immer notwendige Verifikation der Lösung bzw. die Angabe von Bedingungen für  $F$  und  $f$ , unter denen sie gültig ist, wird wegen ihrer Schwierigkeit vom Verf. nur in Spezialfällen durchgeführt.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

## Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Sheffer, I. M.: On  $k$ -periodic systems of linear equations. Trans Amer. math. Soc. **63**, 244—313 (1948).

Das unendliche Gleichungssystem (1)  $a_{n0}x_n + a_{n1}x_{n+1} + \dots = c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , mit komplexen Koeffizienten heißt  $k$ -periodisch, wenn  $A_{kn+p}(t) = A_p(t)$  für alle  $n^*$  und  $p = 0, 1, \dots, k-1$  gilt, wobei  $A_p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{pi} t^i$  gesetzt ist. Man setze

$((x_n)) = \lim |x_n|^{1/n}$ . Die  $A_p(t)$  seien in  $|t| \leq q$  analytisch. Dann konvergiert (1) für alle  $((x_n)) \leq q$ . Es werden alle solchen Lösungen für  $((c_n)) \leq q$  gesucht. Ist  $\omega$  eine  $k$ -te Einheitswurzel, so sei  $\Delta_A(t)$  die (1) zugeordnete Determinante  $|\omega^{ij} A_j(\omega t)|$ ,  $i, j = 0, \dots, k-1$ . Sie ist unter der im folgenden stets zu machenden Voraussetzung:  $A_j(0) \neq 0$  für alle  $j$ , nicht identisch Null. Die Anzahl der Nullstellen von  $\Delta_A(t)$  in  $|t| \leq q$  ist ein Vielfaches  $m = lk$  von  $k$ ;  $l$  heißt die Ordnung von (1). Mit  $t_0$  ist jedes  $\omega^j t_0$  Wurzel von  $\Delta_A$ , die Wurzeln gruppieren sich so in Nester von je  $k$  zusammengehörigen. Ist (1) von der Ordnung  $l$ , so gibt es ein System (1) der Ordnung 0 mit der Matrix  $\mathfrak{C}$  und  $l$  Systeme der Ordnung 1 mit Matrizen  $\mathfrak{B}_j$ ,

so daß die Matrix  $\mathfrak{A}$  von (1) (sie sieht so aus:  $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots \\ 0 & a_{10} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ ) gleich  $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_l \mathfrak{C}$

wird. Daraus ergibt sich, daß (1) im homogenen Fall genau  $l$  linear unabhängige Lösungen hat und daß das inhomogene System für jede rechte Seite  $c_n$  lösbar ist. Es sei bemerkt, daß Verf. in einer späteren Note [Bull. Amer. math. Soc. **55**, 777—788 (1949)] die Lösungen explizit bestimmt. Als Funktionen  $\Delta_A(t)$  eines  $k$ -periodischen Systems (1) treten sämtliche in  $|t| \leq q$  analytischen Funktionen  $F(t)$  mit  $F(0) \neq 0$  auf, deren Potenzreihenentwicklung um 0 nur Potenzen von  $t^k$  enthält, doch gibt es stets unendlich viele solche Systeme mit demselben  $F(t)$ . Systeme von der Ordnung 1, deren zugeordnete Funktionen  $B_j(t)$  (statt  $A_j(t)$ ) für alle  $j \neq s$  gleich 1 sind und  $B_s(t) = t^k - \alpha^k$ , heißen kanonisch. Ein System (1) der Ordnung  $l$  läßt sich dann auch so zerlegen: (2)  $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_l \mathfrak{C}_{l+1}$ , die  $\mathfrak{B}_i$  kanonisch, die  $\mathfrak{C}_i$  von der Ordnung 0. Neben (1) wird auch das gestörte System mit der Matrix  $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$  betrachtet, wobei auch  $\mathfrak{A}^*$  unterhalb der Hauptdiagonale verschwindet: für die oberhalb gelegenen Elemente von  $\mathfrak{A}^*$  wird vorausgesetzt

$$|a_{ni}^*| \leq k_n \Theta^i, \quad k_n \rightarrow 0, \quad \Theta < 1/q, \quad a_{n0} + a_{n0}^* \neq 0 \quad \text{für alle } n.$$

Sind die Wurzeln verschiedener Nester von  $\Delta_A(t)$  von verschiedenem Betrag, so läßt sich aus der Zerlegung (2) von  $\mathfrak{A}$  eine entsprechende für  $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$  ableiten, in der jedes  $\mathfrak{B}_i$  durch ein gestörtes  $\mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_i^*$  ersetzt ist. Daraus ergibt sich dasselbe Lösungsverhalten für das gestörte System. Dies gilt auch noch für den Fall, daß Wurzeln verschiedener Nester den gleichen Betrag haben, doch erfordert der Beweis dann recht verwickelte Überlegungen. Der Fall  $k=1$  ist von Perron [Math. Ann. **84**, 1—15 (1921)] behandelt worden.

G. Köthe (Mainz).

**Nikodým, Otton Martin:** Sur les fonctionnelles linéaires. Classe régulière de fonctions. *Intégration*. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 169—171 (1949).

Dans une Note précédente (ce Zbl. **34**, 29) l'auteur a introduit la notion de pseudo-topologie. Dans cette Note et la suivante, il montre l'intérêt de cette notion dans la théorie des fonctionnelles linéaires. Il appelle „classe régulière de fonctions“ sur 1 (ensemble fondamental) une famille linéaire (espace vectoriel réel) de fonctions réelles sur 1 contenant les constantes, les valeurs absolues de ses éléments et les limites communes de suites non-croissantes et de suites non-décroissantes. Les fonctions pseudo-continues ainsi que les fonctions pseudo-continues bornées sur une pseudo-topologie ( $G$ ) constituent des classes régulières désignées par  $C_G$  et  $C_{G_b}$ . Si  $C$  est une classe régulière, la famille  $G^*$  des images inverses des ensembles ouverts de la droite numérique par les fonctions de  $C$  est une pseudo-topologie réduite et  $C_{G^*_b} = C_b$  (classe des fonctions bornées de  $C$ ).  $A$  désigne une algèbre booléenne de sous-ensembles de 1 dont 1 est l'unité,  $\gamma$  une fonction simplement additive et bornée définie sur  $A$  (mesure jordanienne). Pour une fonction  $f$  mesurable ( $A$ ) et bornée,  $\int f d\gamma$  est définie par partitions finies verticales; cette intégrale est étendue aux fonctions mesurables ( $A$ ) non-bornées par le procédé de de la Vallée-Poussin. Si  $A$  est l'extension booléenne  $B(G)$  d'une pseudo-topologie ( $G$ ), l'intégrale  $U(f)$  est une fonctionnelle linéaire et continue par rapport à la convergence uniforme sur l'espace des fonctions pseudo-continues et  $\gamma$ -sommables. Chr. Pauc.

**Nikodým, Otton Martin:** Sur les fonctionnelles linéaires. Représentation par des intégrales. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 288—289 (1949).

(Suite de la précédente). Si  $U$  est une fonctionnelle linéaire sur  $C_b$  continue vis-à-vis de la convergence uniforme, il existe une mesure jordanienne  $\mu$  définie sur l'extension borélienne  $T(G)$  de ( $G$ ) telle que  $U(f) = \int f d\mu$ . Il y a équivalence entre les propriétés suivantes: (P1)  $\mu$  est unique pour tout  $U$ , (P2)  $\mu$  est unique pour une  $U$ , (P3)  $G$  est une  $\sigma$ -algèbre booléenne (tribu).  $G$  étant supposée réduite, une condition de prolongement d'une mesure jordanienne  $\gamma$  sur  $B(G)$  en une mesure de Lebesgue-Fréchet est que: Quelle que soit la suite bornée  $y_n$  de fonctions pseudo-continues convergeant vers une fonction  $y$  mesurable  $B(G)$ , la suite  $\int y_n d\gamma$  a une limite  $= \int y d\gamma$ . Dans les conditions du théorème de représentation,  $I$  désignant un  $\sigma$ -idéal dans  $G$ , l'implication  $(f = g \pmod{I}) \rightarrow (U(f) = U(g))$  est équivalente à  $(a = b \pmod{I}) \rightarrow (\mu(a) = \mu(b))$ .  $V$  représentant une famille linéaire de fonctions définies sur 1,  $\gamma$  une mesure jordanienne sur 1 telle que toute fonction  $f$  de  $V$  soit  $\gamma$ -sommable, il existe une pseudo-topologie ( $G$ ) sur 1 vis-à-vis de laquelle chaque  $f$  soit pseudo-continue et une mesure jordanienne  $\mu$  sur  $T(G)$  telle que  $\int f d\gamma = \int f d\mu$ . Chr. Pauc (Le Cap).

**Nikodým, Otton Martin:** Remarques sur la pseudo-topologie et sur les fonctionnelles linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 863—865 (1949).

Deux remarques concernent les pseudo-topologies (Voir analyses précédentes): Celles-ci furent, antérieurement à l'auteur, introduites et étudiées en détail par A. D. Alexandroff [Additive set-fonctions in abstract spaces, *Mat. Sbornik*, n. S. **8**, 307—342 (1940), **9**, 563—621 (1941), **13** 169—238 (1943); ce Zbl. **23**, 397, **28**, 27] dont la „charge“ est une mesure jordanienne définie sur  $B(G)$  satisfaisant à une condition de régularité suivant Carathéodory. Elles peuvent être envisagées du point de vue somatique, les fonctions intervenant étant interprétées comme „fonctionoïdes“ [O. Nikodym, ce Zbl. **29**, 220]. Une démonstration est esquissée du théorème suivant du à S. Bochner et R. S. Phillips [*Ann. Math.*, Princeton, II. S. **42**, 316—324 (1941); ce Zbl. **26**, 1] dans le cas d'ensembles:  $B$  désignant une algèbre de Boole avec unité 1,  $\mu$  une mesure jordanienne (bornée) non-négative sur  $B$ ,  $\Phi$  une fonction simplement additive et bornée sur  $B$  telle que



pour toute suite non-croissante  $a_n$  d'éléments de  $B$  de mesures tendant vers 0,  $\lim \Phi(a_n) = 0$ , il existe un fonctionoïde  $\varphi$  sur  $B$  dont  $\Phi$  est l'intégrale par rapport à  $\mu$ . L'auteur supposant (ce qui ne restreint pas la généralité) que  $\mu$  est une mesure positive, considère l'extension complète et (dénombrablement) additive  $B'$  de  $B$  suivant H. M. Mac Neille pour  $\mu$  et prolonge simultanément  $\mu$  et  $\Phi$  sur  $B'$  [Remarque du Réf. — Le théorème s'établit aussi aisément en utilisant la représentation selon Stone des somas de  $B$  par des ensembles compacts et prolongeant les transférées de  $\mu$  et  $\Phi$  en des fonctions (dénombrablement) additives]. La dernière partie de la Note est consacrée à l'indétermination dans la représentation d'une intégrale de Stieltjes sur l'intervalle  $[0, 1]$  par une intégrale de Fréchet (employée dans les Notes précédentes)  $\int f d\mu$  où  $\mu$  représente une mesure jordanienne sur la famille des ensembles boréliens de l'intervalle. Il est montré qu'il existe au moins  $c = 2^{\aleph_0}$  représentations pour les  $f$  continues. *Chr. Pauc (Le Cap).*

**Najmark (Neumark), M. A.:** Ringe mit Involution. *Uspechi mat. Nauk* 3, Nr. 5 (27), 52—145 (1948) [Russisch].

In Erweiterung einer Arbeit von Gelfand und Neumark [dies. Zbl. 31, 34; Bezeichnungen vgl. dort], die z. T. wörtlich mit übernommen ist, untersucht Verf. mit algebraischen, topologischen und funktionalanalytischen Methoden die Eigenschaften von (abstrakten) Ringen mit Involution, indem er ihre Darstellungen im Hilbertschen Raum betrachtet. Die benutzten Hilfsmittel werden in Kapitel 1 und 2 ausführlich entwickelt; einige wichtige Begriffe sind: kanonische Zerlegung ( $A = UH$ , wo  $U$  unitär,  $H$  Hermitesch); Graph eines Operators; Ideal, Radikal, Ringhomomorphismus; irreduzible Darstellung, direkte Summe von Darstellungen; minimale zulässige Norm, reduzierter Ring  $R'$ , dessen abgeschlossene Hülle  $\bar{R}$ ; Majorisierung von linearen Funktionalen durch ein positives Funktional (mittels der Beziehung  $\ll$ ); unzerlegbares Funktional; schwache Topologie und konvexe Menge  $K$  im konjugierten Raum (hierzu vgl. Krein und Rutman, dies. Zbl. 30, 129); monotone Kette von Stützmannigfaltigkeiten zu  $K$ ; Extrempunkt von  $K$  (als minimale Stützmannigfaltigkeit). Es gilt der Satz: Sei  $R$  ein vollständiger normierter Ring mit Involution,  $H$  die Menge der Hermiteischen Elemente (d. h. der  $x$  mit  $x = x^*$ ) von  $R$ ,  $e$  die Einheit von  $H$ ,  $\bar{H}$  der zu  $H$  konjugierte Raum,  $K$  die Menge der positiven  $f \in H$  mit  $f(e) = 1$ , also eine Teilmenge der Einheitskugel in  $H$ . Dann ist  $K$  konvex, und die unzerlegbaren Funktionalen  $f$  auf  $R$  mit  $f(e) = 1$  sind genau die Extrempunkte von  $K$ . — Zu jedem  $x_0 \in R$  mit  $x_0 \neq 0$  gibt es eine irreduzible Darstellung  $D$  von  $R$ , bei der  $D(x_0) \neq 0$  wird. — Jedes positive Funktional auf  $R$  kann durch eine Summe von unzerlegbaren Funktionalen approximiert werden. — Kapitel 3 behandelt insbesondere kommutative Ringe, symmetrische Ringe, Gruppenringe und den Ring aller beschränkten Operatoren in einem (separablen) Hilbertschen Raum. — Ausführliche Literaturangaben. *Wecken.*

**Coddington, Earl A.:** Note on the spectral representation of a bounded normal matrix. *Bull. Amer. math. Soc.* 54, 736—739 (1948).

Aus den Resultaten über das Momentenproblem in mehreren Variablen ergibt sich in einfacher Weise: Sind  $H_1$  und  $H_2$  vertauschbare beschränkte Hermiteische Matrizen und ist für ein festes  $y$  mit  $|y| = 1$   $\mu_y(m, n) = y^* H_1^m H_2^n y$ , so gibt es eine additive monotone Mengenfunktion  $\Phi_y(S)$  in der komplexen Ebene, so daß 
$$\mu_y(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^m v^n \Phi_y d(S^{uv}) \text{ für alle } m, n \geq 0 \text{ gilt.}$$
 Daraus ergibt sich in einfacher Weise die Spektraldarstellung normaler beschränkter Matrizen. *G. Köthe.*

**Mackey, George W.:** A theorem of Stone and von Neumann. *Duke math. J.* 16, 313—326 (1949).

Ein Satz von Stone und von Neumann über die Einzigkeit der quanten-

mechanischen Operatoren  $i\partial/\partial x_i$  und  $x_i$  wird zu folgendem Satz verallgemeinert.  $G$  sei eine separable lokalkompakte abelsche Gruppe mit der Charaktergruppe  $\tilde{G}$ . Es sei  $\sigma \rightarrow U_\sigma^\dagger$  eine Darstellung von  $G$  im Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$ ,  $\tau \rightarrow V_\tau$  eine solche von  $\tilde{G}$ , und es gelte  $U_\sigma V_\tau = (\sigma, \tau) V_\tau U_\sigma$  für alle  $\sigma \in G$ ,  $\tau \in \tilde{G}$ . Dann ist  $\mathfrak{H}$  direkte Summe höchstens abzählbar vieler abgeschlossener Teilräume  $\mathfrak{H}_i$ , die durch die  $U_\sigma, V_\tau$  in sich abgebildet werden; jedes  $\mathfrak{H}_i$  läßt sich durch eine lineare Isometrie  $S_i$  auf den Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}(G)$  der auf  $G$  quadratisch integrierbaren komplexwertigen Funktionen so abbilden, daß  $S_i U_\sigma S_i^{-1} f(x) = f(x\sigma)$  und  $S_i V_\tau S_i^{-1} f(x) = (\tau, x) f(x)$  ist. Der Beweis benützt die Theorie der Unitärinvarianten von Nakano, einen Satz von Ambrose und Godement über die unitären Darstellungen der linearen Transformationen der Geraden in sich und den folgenden Satz über beliebige (nichtabelsche) separable lokalkompakte Gruppen  $G$ :  $U_\sigma$  sei eine Darstellung von  $G$  in  $\mathfrak{H}$ . Es sei ferner  $h \rightarrow V_h$  ein linearer Homomorphismus des Ringes aller beschränkten komplexwertigen Borelschen Funktionen auf  $G$  in den Ring der beschränkten Operatoren auf  $\mathfrak{H}$  mit den Eigenschaften a) Ist  $h_1(x) = \overline{h_2(x)}$ , so ist  $V_{h_1}$  zu  $V_{h_2}$  adjungiert; b) Sind  $h_1, h_2, \dots$  die charakteristischen Funktionen disjunkter Borelmengen auf  $G$  und  $h = \sum h_i$ , so konvergiert  $\sum V_{h_i}$  schwach. Es sei ferner  $U_\sigma V_h = V_{h\sigma} U_\sigma$  mit  $h\sigma(x) = h(\sigma x)$  für alle  $h$ . Dann ist  $\mathfrak{H}$  wieder direkte Summe höchstens abzählbar vieler  $\mathfrak{H}_i$  und es gibt wie oben eine Isometrie  $S_i$  von  $\mathfrak{H}_i$  auf  $\mathfrak{H}(G)$  mit  $S_i U_\sigma S_i^{-1} f(x) = f(x\sigma)$  und  $S_i V_h S_i^{-1} f(x) = h(x) f(x)$ .  
G. Köthe (Mainz).

Mazur, S. et W. Orlicz: Sur les espaces métriques linéaires. I. *Studia math.* **10**, 184—208 (1948).

Dies ist der erste Teil einer systematischen Darstellung der Theorie der linearen metrischen Räume vom Typus  $B_0$ , auf die sich ein großer Teil der Theorie der Banachräume (Räume  $B$ ) übertragen läßt. Ein linearer metrischer Raum, der durch Vervollständigung in einen Raum vom Typus  $F$  übergeht, heißt  $F^*$ -Raum. Ein  $F^*$ -Raum  $X$  heißt  $B_0^*$ -Raum, wenn die Topologie von  $X$  durch eine Folge wachsender Halbnormen  $|x|_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , erzeugt werden kann. Die Norm von  $X$  ist dann

$$|x| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x|_k}{1 + |x|_k}.$$

Ist ein  $B_0^*$ -Raum vollständig, so heißt er ein  $B_0$ -Raum. Es wird eine Reihe von Beispielen für  $B_0$ -Räume angegeben und auf Separabilität untersucht, ebenso darauf, ob jede beschränkte Teilmenge relativ kompakt ist. Es werden mehrere notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, wann ein  $F^*$ -Raum ein  $B_0^*$ -Raum ist, so z. B. dann und nur dann, wenn die konvexe Hülle jeder kompakten Teilmenge wieder kompakt ist, oder wenn aus  $|x_n| \rightarrow 0$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ ,  $t_n \geq 0$ , stets folgt,

daß  $\sum_{n=1}^N t_n x_n$  mit  $N \rightarrow \infty$  beschränkt bleibt. Die Räume vom Typus  $B_0$  sind kürzlich auch von J. Dieudonné und L. Schwartz [dies. Zbl. **35**, 355] untersucht worden.

G. Köthe (Mainz).

Kozlov, V. Ja.: Über Basen im Raume  $L_2[0,1]$ . *Mat. Sbornik*, n. S. **26** (68), 85—102 (1950) [Russisch].

The au. gives conditions in order that a sequence of functions  $\psi_n(x)$  from  $L^2$  on  $(0, 1)$  be a basis. Like other authors in this field [Banach, *Théorie des opérations*, Warsaw 1932; this Zbl. **5**, 209; Bary, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **54**, 379—382 (1946)] he introduces functions  $g_n(x)$  biorthogonal to the  $\psi_n(x)$ . Let  $S_n(f)$  be the operator defined by  $S_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x)$ ,  $c_k = \int_0^1 f g_k dx$ . Then  $\{\psi_n\}$  is a



basis if and only if there is a complete biorthogonal  $\{g_n\}$  and the sequence  $B_n = \|\mathcal{S}_n\|$  is bounded. If  $\{r_n(x)\}$  is the E. Schmidt's orthogonalization of  $\{g_n(x)\}$ , then  $\psi_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} A_{nk} r_k(x)$  and  $g_n(x) = \sum_{k=1}^n \beta_{nk} r_k(x)$ . In his subsequent theorems, the au. starts with a given system  $\{r_n(x)\}$ , which generates  $\{\psi_n\}$  and  $\{g_n\}$  and gives conditions involving the properties of the  $A_{nk}$ ,  $\mathcal{S}_n(f)$  and  $r_n(x)$  which insure that  $\{\psi_n\}$  is a basis. A special discussion is given to bases for which  $B_n^2 A_{nn}^2 = 1$ . Examples of bases of this type (different from orthogonal bases) are given.

G. G. Lorentz (Kingston, Ont.).

Köthe, Gottfried: Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume. Math. Z., Berlin 52, 627—630 (1950).

Soit  $E$  un espace vectoriel réunion d'une suite croissante  $(E_n)$  de sous-espaces, et supposons définie sur chaque  $E_n$  une topologie localement convexe  $\tau_n$  telle que la topologie induite par  $\tau_{n+1}$  sur  $E_n$  soit moins fine que  $\tau_n$ . L'Au. considère alors sur  $E$  la topologie localement convexe la plus fine qui induise sur chaque  $E_n$  une topologie moins fine que  $\tau_n$ . Il montre que si  $E$  est séparé, pour que  $E$  soit complet, il faut et il suffit que pour chaque  $n$ , tout filtre de Cauchy (pour la structure uniforme de  $E$ ) ayant une base dans  $E_n$ , soit convergent dans un  $E_{n+k}$  convenable (pour la topologie  $\tau_{n+k}$ ). Si tous les espaces  $E_n$  sont des espaces  $(F)$  et si  $\tau_{n+1}$  induit  $\tau_n$  sur  $E_n$ , on retrouve un théorème démontré par L. Schwartz et le Réf. [Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble 1, 61—101 (1949); ce Zbl. 35, 355]. L'Au. donne enfin un exemple où les  $E_n$  sont des espaces  $(F)$ , où  $\tau_{n+1}$  induit sur  $E_n$  une topologie strictement moins fine que  $\tau_n$ , et où  $E$  n'est pas complet. J. Dieudonné (Nancy).

Edwards, R. E.: A property of a class of functions regular in the unit circle and a theorem on translations. J. London math. Soc. 25, 33—39 (1950).

$C$  sei die Klasse der für  $|z| < 1$  analytischen und für  $|z| \leq 1$  stetigen Funktionen  $\varphi(z)$ . Ist eine feste Funktion  $q(z)$  aus  $C$  und eine Menge  $E$  von Punkten  $\zeta$  mit  $|\zeta| \leq 1$  gegeben, so bedeute  $E_q$  die Menge aller Funktionen aus  $C$  von der Form  $\varphi(\zeta z)$ . Satz 1: Wenn 1. keiner der Taylorkoeffizienten von  $\varphi(z)$  verschwindet und entweder 2a)  $E$  einen Häufungspunkt im Innern des Einheitskreises hat oder 2b) die abgeschlossene Hülle  $\bar{E}$  von  $E$  mit der Peripherie des Einheitskreises eine Menge von positivem (linearen) Lebesgueschen Maß gemein hat, so ist  $E_q$  fundamental in  $C$ , d. h. jede Funktion aus  $C$  kann durch lineare Kombinationen von Funktionen  $\varphi(\zeta z)$  im Sinne der Normierung  $\|\varphi\| = \sup_{|z| \leq 1} |\varphi(z)|$  beliebig genau approximiert werden. —  $C^*$  sei die Klasse der stetigen und mit  $2\pi$  periodischen Funktionen

$f(t)$  der reellen Variablen  $t$ , die eine „einseitige“ Fourier-Entwicklung  $f(t) \sim \sum_0^{\infty} c_n e^{int}$  besitzen (d. h.  $c_n = 0$  für  $n = -1, -2, \dots$ ).  $C^*$  wird durch  $\|f\| = \sup |f(t)|$  normiert. Ordnet man einem  $q$  aus  $C$  seine Randfunktion  $f(t) = q(e^{it})$  zu, so ist diese Abbildung eineindeutig und isomorph. Der Rotation  $q(e^{-i\tau} z)$  entspricht die Translation  $f(t - \tau)$ . Aus Satz 1 folgt daher: Satz 2:  $f(t) \sim \sum_0^{\infty} c_n e^{int}$  sei ein festes Element von  $C^*$ , bei dem  $c_n \neq 0$  für  $n = 0, 1, \dots$  ist.  $T$  sei eine Menge von reellen Zahlen  $\tau$ , deren abgeschlossene Hülle positives Lebesguesches Maß hat. Dann sind die Translationen  $f(t - \tau)$  fundamental in  $C^*$ . — Im Raum  $C_p$  aller stetigen Funktionen mit der Periode  $2\pi$  gilt ein entsprechender Satz nicht. Vielmehr gibt es eine Funktion  $f$  aus  $C_p$ , deren Fourier-Koeffizienten sämtlich nicht verschwinden, von der Art, daß die Translationen  $f(t - \tau)$  nicht fundamental sind, wenn  $\tau$  die Zahlen einer Menge in  $I = [0, 2\pi]$  bedeutet, die nicht überall dicht in  $I$  liegt.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

## Praktische Analysis:

**Walther, Alwin:** Mathematisches Denken und mathematische Geräte in ihrer gegenseitigen Beeinflussung. Math.-phys. Semesterber. Göttingen **1**, 169—188 (1950).

Die Arbeit gibt einen Vortrag wieder, der auf der 14. Tagung zur Pflege des Zusammenhanges von Universität und Schule gehalten wurde. Ihr Ziel ist, die gegenseitige Befruchtung des mathematischen Denkens und der instrumentellen Exekutive aufzuzeigen. Im ersten Teil, der die klassischen mathematischen Instrumente behandelt, wird besonders auf den Zusammenhang der Matrizenrechnung und des Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit der Rechenmaschine verwiesen. Im zweiten Teil wird zunächst die Integriermaschine behandelt, die z. B. der theoretischen Mathematik das Problem der Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen mehrerer Veränderlicher und das Kopplungsproblem stellt. Schließlich wird auf die Rechenautomaten eingegangen, wo z. B. der Ersatz von Differentialbeziehungen durch Differenzen eine Rolle spielt, ferner die Lösung linearer Gleichungssysteme durch Minimalisierung einer quadratischen Form usw. Grundsätzlich bahnt sich nach Ansicht des Verf. „eine experimentell-heuristische Mathematik an, in welcher eine Unzahl von Ansätzen und Verfahren systematisch durchprobiert und auf ihre Brauchbarkeit untersucht werden kann“.

Willers (Dresden).

**Bodewig, E.: Zu R. Zurmühl:** Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Martzenverfahren von Banachiewicz. Z. angew. Math. Mech. **29** (1949) 76—84. Z. angew. Math. Mech. **30**, 130—131 (1950).

**Zurmühl, R.: Erwiderung:** Z. angew. Math. Mech. **30**, 131—132 (1950).

Verf. stellt fest, daß das Verfahren von Banachiewicz identisch mit dem abgekürzten Verfahren von Gauß ist, ebenso wie das Verfahren von Choleski eine Variante des abgekürzten Gaußschen Verfahrens ist. Zurmühl weist darauf hin, daß diese Beziehungen schon früher von anderen, so von Unger und Andersen gefunden seien. Das Ziel seiner Arbeit sei, auf die neuartige Rechenanordnung und die sich daraus bei sinngemäßer Anwendung der Rechenmaschine ergebende außerordentliche Zeitersparnis hinzuweisen, die unabhängig von dem aufgezeigten Zusammenhang ihre Gültigkeit habe.

Willers (Dresden).

**Rodríguez, Vicente:** Grapische Lösung der trinomischen Gleichung  $Y^J + p Y^k + q = 0$ . Mat. Elemental, Madrid, IV. S. **7**, 11—15 und 48—59 (1947) [Spanisch].

**Hoel, P. G. and D. D. Wall:** The accuracy of the root-squaring method for solving equations. J. Math. Phys., Massachusetts **26**, 156—164 (1947).

Es wird darauf hingewiesen, daß die Ableitung aufeinanderfolgender Gleichungen beim Graeffschen Verfahren unter Benutzung von Lochkarteneinrichtungen erfolgen kann. Insbesondere werden aber zwei wesentliche Fehlerquellen des Verfahrens untersucht. Die eine rührt daher, daß man das Verfahren nicht genügend weit fortsetzt, die andere hat ihre Ursache in der Verminderung der Genauigkeit der Koeffizienten der abgeleiteten Gleichungen, da man alle Operationen nur mit begrenzter Genauigkeit infolge der begrenzten Stellenzahl der Rechenmaschinen durchführen kann. — Ist  $r_k$  eine der gesuchten Wurzeln, so findet Verf., daß, nachdem man zu einer Gleichung mit den Koeffizienten  $c_i$  fortgeschritten ist, deren Wurzeln  $r_k^m$  ( $m = 2^s$ ) sind, z. B. im Fall, daß alle Wurzeln reell und voneinander verschieden sind, die Ungleichung

$$\left( \frac{c_k}{c_{k-1}} \right)^{1/m} (1 + Q(t))^{-1/m} \leq |r_k| \leq \left( \frac{c_k}{c_{k-1}} \right)^{1/m} (1 + Q'(t))^{1/m}$$

besteht. Für die Berechnung der  $Q$  werden Formeln gegeben. Die Abschätzung wird auf den Fall, daß reelle und komplexe Wurzeln vorkommen, erweitert. Entsprechende Überlegungen geben für die zweite Fehlerursache unter Umständen eine



wesentliche Abnahme der Zahl der von Null verschiedenen Anfangsziffern und damit eine Abnahme der relativen Genauigkeit der Koeffizienten. *Willers* (Dresden).

**Samuelson, P. A.:** Iterative computation of complex roots. *J. Math. Phys.*, Massachusetts **28**, 259—267 (1950).

Verf. diskutiert die Vorzüge und Nachteile verschiedener Berechnungsverfahren (u. a. der Methoden von Newton, Horner, Bernoulli, Lin) und die Anwendungen dieser Berechnungsweisen für komplexe Wurzeln. *E. M. Bruins* (Amsterdam).

**Lin, Shih-Nge:** Numerical solution of complex roots of quartic equations. *J. Math. Phys.*, Massachusetts **26**, 279—283 (1948).

Die vier komplexen Wurzeln einer biquadratischen Gleichung berechnet Verf. durch die Zerlegung  $x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \equiv (x^2 + b_1 x + b_0)(x^2 + a_1 x + a_0)$ . Aus den Relationen  $A_0 = a_0 b_0$ ,  $A_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$ ,  $A_2 = a_1 b_1 + a_0 + b_0$ ,  $A_3 = a_1 + b_1$  eliminiert er auf zwei verschiedene Weisen  $a_1$  und  $a_0$ . Die Diskriminanten der quadratischen Gleichungen für  $b_0$  mit  $b_1$  als Parameter sind  $b_1^2 - A_3 b_1 + \frac{1}{4} A_1^2 / A_0 \equiv b_1^2 - 2\gamma b_1 + \alpha^2$ ,  $b_1^2 - A_3 b_1 + A_2 - 2\sqrt{A_0} \equiv b_1^2 - 2\gamma b_1 + \beta$ . Verf. nennt das Verschwinden dieser Diskriminanten die notwendigen Bedingungen für  $a_0 = b_0$ , obwohl die notwendige und hinreichende Bedingung offenbar  $A_2^2 - A_0 A_3^2 = 0$  ist. Falls  $a_0 = b_0$ , sind  $a_1$  und  $b_1$  die Wurzeln der zweiten Gleichung. Falls  $a_0 \sim b_0$ , berechnet Verf.  $a_1$  und  $b_1$  in erster Näherung aus dieser Gleichung. Hieraus berechnet er  $a_0$  und  $b_0$  mittels  $b_0 = \sqrt{A_0} a_1^{-1} (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta})$  und verbessert die Werte durch Iteration, indem er  $\beta$  ersetzt durch  $\beta' = A_0 - (a_0 + b_0)$ . Die Schlußbemerkungen des Verf., z. B. daß für vier komplexe Wurzeln  $A_2$  und  $A_0$  beide positiv sind und daß, wenn eine der beiden nicht-positiv ist, reelle Wurzeln auftreten, sind unrichtig [ $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 10 \equiv (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4x + 5)$ ].—Die Methode ist nach Ansicht des Ref. wertlos. Beachtet man, daß die Gleichung für  $Y = a_0 + b_0$  wird  $Y^3 - A_2 Y^2 + (A_1 A_3 - 4A_0) Y + (4A_0 A_2 - A_1^2 - A_0 A_3^2) = 0$ , so erhält man mit der Newton-Horner-Methode die einzige reelle Wurzel und in dem vom Verf. gegebenen Beispiel mit 16 Additionen, 11 Multiplikationen, 2 Divisionen und einer Wurzelziehung bedeutend genauer, als Verf. mit 9 Divisionen, 6 Multiplikationen, 9 Wurzelziehungen und 36 Additionen die Werte von  $a_0, b_0$ , wodurch  $a_1, b_1$  linear bestimmt sind.

*E. M. Bruins* (Amsterdam).

**Teixidor, J.:** Arithmetischer Beweis einer Interpolationsformel. *Gac. mat.*, Madrid, I. Ser. **1**, 139—141 (1949) [Spanisch].

**Vedeler, Georg:** A Mathieu equation for ships rolling among waves. I. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **22**, Nr. 25, 113—118 (1950).

**Vedeler, Georg:** A Mathieu equation for ships rolling among waves. II. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **22**, Nr. 26, 119—123 (1950).

Für das Rollen eines Schiffes in einer trochoidalen Welle wird eine Differentialgleichung angegeben, welche die durch Modellversuche nahegelegten Annahmen enthält, daß der Schwerpunkt des Schiffes eine Kreisbahn beschreibt und daß die Resultierende von Schiffsgewicht und Zentrifugalkraft auf der Wellenoberfläche senkrecht steht. Sie ist eine inhomogene Mathieusche Differentialgleichung

$$(1) \quad d^2\varphi/dx^2 + a^2(1 + b \cos 2x)\varphi = a^2 b (\sin 2x + \frac{1}{2} b m \sin 4x)$$

$\varphi$  = Rollwinkel;  $a, b, m$  sind Konstanten. Diese Differentialgleichung wird in  $(n - \frac{1}{2})\pi < x < (n + \frac{1}{2})\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) durch die Differentialgleichung [siehe auch Brillouin, dies. Zbl. **32**, 346]

$$(2) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{A^2}{(c + |\xi|)^4} \varphi = \frac{B}{(c + |\xi|)^3} (\sin Q + \frac{1}{2} b m \sin 2Q)$$

approximiert. Hierin bedeutet  $\xi = x - n\pi$ ,  $Q = q\xi (c + |\xi|)^{-1}$ . Die Konstanten  $A, B, c, q$  werden so bestimmt, daß die Koeffizienten in (1) möglichst gut mit denen in (2) übereinstimmen. Diese neue Differentialgleichung läßt sich geschlossen

durch elementare Funktionen integrieren. Durch Verallgemeinerung des Approximationsansatzes (2) wird eine verbesserte Näherung entwickelt, die sich ebenfalls durch elementare Funktionen ausdrücken läßt. Durchgerechnete Beispiele mit  $b = 0,15$  und  $a = 1,5$ ,  $m = 16$  bzw.  $a = 3$  und  $m = 4$  zeigen die Brauchbarkeit der entwickelten Näherungsmethoden. Die Ergebnisse werden mit denen der einfacheren Theorie des Schiffrollens von W. Froude [Trans. Inst. Naval Architects 1861, 180] verglichen. *J. Meixner (Aachen).*

**Palm, F. W.:** Über die Verallgemeinerung des graphischen Verfahrens von Lill. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 157, 79—96 (1949).

Die Verallgemeinerung des Lillschen Verfahrens zur Behandlung von Funktionen, die in Produktdarstellung gegeben sind, wird untersucht. In diesem Falle erzeugt die  $i$ -te Seite aller möglichen eingespannten Polygonzüge eine rationale ganze Kurve  $i$ -ter Ordnung und Klasse, die im Fernpunkt der ersten oder zweiten Seite des darstellenden Zuges (je nachdem  $i$  eine gerade oder ungerade Zahl ist) eine Berührung ( $i - 1$ )-ter Ordnung mit der Ferngeraden hat. Lage ihrer Spitzen und Konstruktionen der Berührungspunkte der Polygonseiten mit dieser Kurve werden gegeben. Das Verfahren kann als eine spezielle Cremona-Transformation, nämlich eine sog. Jonquières-Transformation  $n$ -ter Ordnung aufgefaßt werden, die auf den Anfangspunkt des darstellenden Zuges ausgeübt wird. Sie wird genauer untersucht, insbesondere werden die Isoklinengitter der rationalen ganzen Funktion behandelt, die bei festen Seiten  $a_2, a_3, \dots, a_n$  und bei veränderlichen  $a_0$  und  $a_1$  des darstellenden Zuges dem Anfangspunkt  $A$  durch die Jonquières-Transformation  $n$ -Ordnung zugeordnet werden, falls dieser sich auf  $x$ - bzw.  $y$ -Parallelen bewegt. *Willers.*

**Palm, F. W.:** Anwendung und Verallgemeinerung des graphischen Verfahrens von Winkler. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 157, 275—297 (1949).

Winkler hat die dem Mesolabium zugrunde liegende Figur verallgemeinert und sie unter Verwendung von  $n$  ähnlichen rechtwinkligen Trapezen zur Berechnung einer ganzen rationalen Funktion  $n$ -ten Grades benutzt. Die Gleichung der von dem Endpunkt beschriebenen Kurve, die durch diese Konstruktion den Punkten der Geraden  $x = a_1$  zugeordnet ist, wird aufgestellt, und es wird gezeigt, daß eine Reihe bekannter Kurven als Spezialfälle darin enthalten sind, für die sich so eine einheitliche Konstruktion auch ihrer Tangenten ergibt. Insbesondere eignet sich das Winklersche Verfahren zur graphischen Berechnung der Koeffizienten der Produktentwicklung, da die die Koeffizienten darstellenden Strecken unmittelbar in der erforderlichen Anordnung und im unveränderten Maßstab erscheinen, also anders als bei dem Segnerschen und dem Lillschen Verfahren, ähnlich wie bei der von Behmann angegebenen Abänderung des Verfahrens von Segner. Das Verfahren läßt sich auf die Bestimmung der Funktionswerte aus der Produktdarstellung verallgemeinern. Diese Konstruktion erfordert nur das Ziehen von Parallelen. Umgekehrt läßt sich auch die Bestimmung der Koeffizienten der Produktdarstellung aus gegebenen Punkten durchführen. In einem letzten Abschnitt wird gezeigt, daß das verallgemeinerte Verfahren von Winkler als eine Jonquières-Transformation  $n$ -ter Ordnung aufgefaßt werden kann. *Willers (Dresden).*

**Mandò, M.:** Le grandi calcolatrici moderne a successioni automatiche. I. Periodico Mat., IV. S. 27, 165—173 (1949).

In dem vorliegenden ersten Teil der Arbeit wird zunächst eine Übersicht über die Arbeitsweise der großen nach dem Analogieprozeß arbeitenden und der numerischen Maschinen gegeben. Genauer besprochen werden Umfang und Einrichtungen einiger Relaismaschinen, insbesondere des A. S. C. C. (Automatic Sequence Controlled Calculator) und des S. S. C. C. (Selective Sequence Controlled Calculator), auch Mark I und Mark II der I. B. M. genannt. Erwähnt werden der Bell Telephone



Laboratory Relay Computer und die von Booth für die British Rubber Producers Research Association gebaute Maschine. Willers (Dresden).

Ridenour, Louis N.: High speed digital computers. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 21, 263—270 (1950).

Verf. gibt eine Übersicht über den gegenwärtigen Entwicklungsstand der Hochgeschwindigkeits-Rechenautomaten, ihre Kapazität, ihren Gebrauch und die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit. Um die zukünftige Entwicklung dieser Maschinen zu klären, sucht er folgende Fragen zu beantworten. 1. Wo werden in Zukunft solche Rechenautomaten gebraucht werden? 2. Wie groß, wie schnell und wie kompliziert sollte künftig ein solcher Hochgeschwindigkeits-Rechenautomat sein? und 3. Wie können solche Automaten zuverlässiger gemacht werden, so daß die Kompliziertheit wächst, ohne daß die Fehlermöglichkeiten zunehmen? Hierfür ist nach Ansicht des Verf. vor allem nötig, daß die Röhren und Relais durch andere, zuverlässigere Vorrichtungen ersetzt werden. Willers (Dresden).

Gonzalez del Valle, A.: Elektronen-Rechenmaschinen. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 9, 97—109 (1949) [Spanisch].

Eine in allgemeinen Worten, ohne irgendwo tiefer auf die wirkliche Konstruktion oder Schaltung einzugehen, sehr popularisierte Beschreibung der Elektronen-Rechenmaschinen. E. M. Bruins (Amsterdam).

Gonzalez del Valle, Angel und Juan Antonio Gomez Garcia: Vorentwurf einer Elektronenmaschine zur Lösung algebraischer Gleichungen. Mem. Mat. Inst. „Jorge Juan“, Nr. 6, 62 S. (1948) [Spanisch].

Wie bei anderen Entwürfen dieser Art von Rechengeräten besteht der Grundgedanke darin, daß über die als Ausschnitt der Gaußschen  $z$ -Ebene dienende Leuchtfläche einer Braun-schen Röhre ein Kathodenstrahl fegt, dessen Intensität an der Stelle  $z$  durch den Wert des Polynoms  $P(z)$  bestimmt ist, so daß sich die Wurzeln der Gleichung  $P(z) = 0$ , welche in dem bestrichenen Ausschnitt liegen, als helle (oder dunkle) Punkte hervorheben. Da sich Summen und zeitliche Ableitungen von elektrischen Strömen leicht bilden lassen, liefert die Operation  $P(d/dt) \exp zt = P(z) \exp zt$  das Polynom  $P(z)$ . Die wesentliche Aufgabe besteht daher in der Erzeugung von  $\exp zt$  als Funktion von  $z = x + iy$ . Bei dieser Modulation der Frequenz  $-iz$  muß man  $x$  und  $y$  unabhängig voneinander variieren können, weil  $x$  und  $y$  die Spannungen für die Strahlablenkung bestimmen. Das analytische Verfahren, erst  $\exp zt$  zu erzeugen und daraus durch Analyse  $x$  und  $y$  zu gewinnen, führt hier auf große technische Schwierigkeiten. Deshalb wird das synthetische Verfahren vorgezogen,  $\exp xt$  und  $\cos yt (= \operatorname{Re} \exp iy t)$  getrennt zu erzeugen und  $\operatorname{Re} \exp zt$  durch Multiplikation beider zu gewinnen. Verf. erörtern die anzuwendenden Schaltungen zur Erzeugung, Variation und Kombination dieser Bestandteile [z. B. entstehen  $\exp xt$  oder  $\cos yt$  bei Entladung eines Kondensators über einen Ohmschen Widerstand oder eine Induktivität; Produkte lassen sich bei Verwendung von Röhren mit parabolischer Kennlinie als Kombination von Quadraten erhalten;  $x$  ergibt sich durch Multiplikation von  $\exp(-xt)$  mit der Ableitung von  $\exp xt$ ] mit den möglichen Vereinfachungen und Verbesserungen, und sie schätzen die mit den derzeitigen Röhren erreichbare Genauigkeit auf fünf Ziffern. Die äußere Handhabung des Gerätes ist so gedacht, daß nach Einstellung der Gleichungskoeffizienten (je ein Knopf für jede Ziffer jedes Koeffizienten) und Einschaltung des Stromes die im Gebiet  $-10 < x, y < +10$  liegenden Gleichungswurzeln auf der in 400 Quadrate geteilten überstrichenen Leuchtfläche sichtbar werden. Man wählt eine Wurzel aus; der Quadrant gibt die Vorzeichen des Real- und des Imaginärteiles, das Feld außerdem die erste Ziffer von  $x$  und  $y$ . Zwei Schaltknöpfe erlauben, die Strahlablenkung in  $x$  und  $y$  um ganze Anzahlen von Gittereinheiten zu ändern; mit ihrer Hilfe wird der Leuchtpunkt in das ursprüngliche Teilquadrat desselben Quadranten verschoben. Ein Verstärker-Knopf läßt dann die Ablenkung in beiden Richtungen auf das Zehnfache anwachsen, so daß die nächsten Ziffern der Lösung abgelesen werden können, und so fort. Bödeuadt (Brunoy).

Greville, T. N. E.: Tables of coefficients in adjusted average graduation formulas of maximum smoothness. Record, Amer. Inst. Actuaries 37, 11—30 and Diskussion 31—36 (1948).

• Vega-Bremiker: Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 97. Aufl. Berlin, Frankfurt a. M.: Weidmannsche Verlagsbuchhandlung 1949. X, 570 S.



## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Lévy, Paul: Les paradoxes de l'infini et le calcul des probabilités. Bull. Sci. math. II. S. 73<sub>1</sub>, 186—192 (1949).

Zwei Anwendungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes von E. Borel in „Les paradoxes de l'infini“ (Gallimard, Paris 1946) dürften auf Mißverständnissen beruhen. Insbesondere wird widerlegt, daß auf Grund des Hausdorffschen Beispiels (Zerlegung: Kugelfläche =  $A + B + C$ ,  $A$  übersetzbar mit  $B$ ,  $C$  und  $B + C$ ) das Auswahlaxiom sich widerspruchsvoll beweise. Bruno de Finetti (Trieste).

● Good, I. J.: Probability and the weighing of evidence. London: Charles Griffin & Co., 120 pp., 16s. net.

„The aim of the present work is to provide a consistent theory of probability that is mathematically simple, logically sound and adequate as a basis for scientific induction, for statistics, and for ordinary reasoning.“ (From the author's preface.) The first chapter contains a classification of earlier systems (Venn, v. Mises, Jeffreys, Ramsey, Koopman and others). The subsequent chapters introduce axioms, „rules“ for their application to judgments concerning degrees of belief, and „suggestions“ for forming bodies of belief. Deductions are made by using the axioms together with the body of beliefs, whereby the latter is enlarged; when this procedure leads to contradictions, as it well may, then the body of beliefs is declared „unreasonable“. The author contends that this trichotomy into axioms, rules and suggestions is the ideal form for a scientific theory. — The author introduces the concept of „factor in favour of a hypothesis“, which is the ratio of the odds in favour of it after the experiment has been made, to those before. It is numerically equal to the likelihood ratio. The logarithm of the latter is the „weight of evidence“ and the logarithm of the odds is the „plausibility“. These notions are useful to explain the essence of the sequential probability ratio test, to quote one example. The last chapter deals with systems of statistics, not quite satisfactorily. Footnotes and the Index contain material which is essential for the understanding of some statements in the main text. — The book contains much that is stimulating, but the reader will be well advised not to expect its formulations to be final. S. Vajda.

Gini, C.: Considerazioni sulle probabilità a posteriori e applicazioni al rapporto dei sessi nelle nascite umane. Metron, Roma 15, 133—171 (1949).

Si tratta della ristampa integrale della Memoria apparsa nel 1911 negli „Studi Economico-Giuridici della Università di Cagliari“. — Il lavoro consta di due parti; la prima contiene fondamentali risultati sul problema delle probabilità a posteriori, la seconda tratta delle variazioni nella probabilità di produrre maschi o femmine attraverso il corso della generazione. — L'interesse di questa memoria risiede soprattutto nel fatto che in essa furono date soluzioni veramente realistiche del problema delle probabilità a posteriori, superando la non conoscenza delle probabilità a priori non già ignorandone l'esistenza ma proponendo il ricorso a procedimenti che permettono di sfruttare tutte le conoscenze già raccolte sul fenomeno in esame. Si tratta di due metodi essenzialmente diversi di cui il primo, qui appena abbozzato, ma successivamente ripreso e sviluppato dall'A. [Atti VII Riun. sci. Soc. Italiana Statistica, 1943], consiste nel supporre che le probabilità a priori  $x$  abbiano una distribuzione del I tipo del Pearson:  $\frac{1}{B(r, s)} x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx$  dove i parametri  $r$  ed  $s$  vengono calcolati sfruttando appunto le conoscenze sul fenomeno in esame raccolte in precedenti prove. — L'altro metodo, ampiamente trattato nella memoria sotto il nome di metodo dei risultati, consiste nello scrivere la formula risolutiva del problema in una forma conveniente che mette in evidenza

le probabilità di certi eventi di cui, in prove precedenti, si é potuto calcolare la frequenza; introdotto allora l'ipotesi, inevitabile in questioni del genere, che queste frequenze diano una buona approssimazione delle rispettive probabilità, basterà sostituire alla probabilità le frequenze per ottenere una soluzione approssimata del problema proposto.

G. Pompilj (Roma).

Gini, C.: *Rileggendo Bernoulli*. Metron, Roma 15, 117—132 (1949).

L'A. rintraccia nell'opera di Giacomo Bernoulli il „peccato originale del Calcolo delle Probabilità“; cioè l'indebito passaggio dalla probabilità diretta all'inversa, di cui ancor oggi soffrono le teorie dei „testi di significatività“, degli „intervalli di confidenza“ e della „inferenza fiduciaria“.

G. Pompilj (Roma).

Fréchet, Maurice: *Sur l'estimation statistique*. Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 207—213 (1949).

Man kann bekanntlich fast sichere Schlüsse auf die „a posteriorische Wahrscheinlichkeit“ eines Ereignisses mit unbekannter Wahrscheinlichkeit  $P$  auf Grund dessen Frequenz  $f = r/n$  bei  $n$ -maliger Wiederholung des Versuches ziehen, d. h.  $f$  umfassende Intervalle  $(p'_r, p''_r)$  für  $P$  fast sicher angeben. Und zwar unabhängig von seiner — unter schwachen Bedingungen eingeschränkten — „a priorischen Wahrscheinlichkeit“, d. h. der Verteilungsfunktion  $F(p)$  von  $P$ , wenn  $n$  hinreichend groß ist. Verf. zeigt nun, daß dies geeignete Bedingungen auch bei mäßigen  $n$  bewirken. Sind nämlich  $\beta'_r, \beta''_r$  zwei  $f$  umfassende Zahlen innerhalb  $(0, 1)$  und ist  $g_r(p)$  eine in  $p = 0$ ,  $h_r(p)$  eine in  $p = 1$  stetige Verteilungsfunktion, dann gibt es für alle  $F(p)$  mit  $F(p) \leq g_r(p)$  für  $p < \beta'_r$  bzw.  $F(p) \geq h_r(p)$  für  $p > \beta''_r$  ein positives  $\vartheta_r$  so, daß

$$\text{Prob} [p'_r(\varepsilon) \leq P \leq p''_r(\varepsilon)] \geq 1 - \varepsilon$$

für alle  $0 < \varepsilon < \vartheta_r$  wird. Hierbei sind  $p'_r(\varepsilon)$  und  $p''_r(\varepsilon)$  die Wurzeln von  $\varepsilon = \binom{r}{n} p^r (1-p)^{n-r}$ .

Szentmártony (Budapest).

Berger, Agnes: *On disjoint sets of distribution functions*. Proc. Amer. math. Soc. 1, 25—31 (1950).

Von der Verteilungsfunktion  $V(x)$  einer Zufallsveränderlichen sei bekannt, daß sie der Vereinigung zweier Mengen  $\{F_i(x)\}$  und  $\{G_j(x)\}$  von verschiedenen Verteilungsfunktionen angehört. Die Prüfung der Annahme, daß  $V(x)$  einer bestimmten der beiden Mengen angehört, würde Schwierigkeiten bereiten, falls es nicht mindestens eine Borelsche Menge  $W$  mit  $\int_W dF_i(x) \neq \int_W dG_j(x)$  für alle  $i$  und  $j$  geben

würde. Eine von Neymann aufgeworfene Frage beantwortend, wird nun gezeigt, daß man mit dieser Schwierigkeit bei abzählbaren Folgen von stetigen  $F_i(x)$ ,  $G_j(x)$  nicht, aber bei endlichen Folgen von unstetigen wohl zu rechnen hat. Und zwar im letzten Falle möglicherweise bereits dann, wenn die Anzahl der Paare  $F_i, G_j$  größer als 2 ist. Den Fall zweier stetigen Funktionenscharen  $F(s, x)$ ,  $G(t, x)$  wird Verf. gemeinsam mit Wald in den Ann. math. Statist. behandeln.

Szentmártony (Budapest).

Krishna Iyer, P. V.: *Difference equations of moment-generating functions for some probability distributions*. Nature, London 165, 370 (1950).

Hinweis auf eine ausführlichere Arbeit im J. Indian Soc. Agric. Statist., in der Verf. folgende Differenzgleichungen für die Moment-erzeugenden Funktionen  $M_m$  beweist:  $p_1, \dots, p_k$  seien die Wahrscheinlichkeiten für Ziehung von  $k$  verschiedenen Farben,  $m$  die Gesamtzahl hintereinander ausgeführter zufälliger Ziehungen. Für die Momenterzeugende  $M_m$  der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der unter den  $m$  Ziehungen auftretenden Nachbargaare von verschiedenen Farben gilt

$$M_m - M_{m-1} - 2a_2 \Theta M_{m-2} - \sum_{r=2}^k (r-1) a_r \Theta^r M_{m-r} = 0, \quad \text{für diejenige der Ver-}$$



teilung der Anzahl ununterbrochener  $r$ -gliedriger Folgen der Länge  $r$  (runs) von bestimmter Farbe  $M_{m+r+1} - M_{m+r} - p^r q \Theta M_m + p^{r+1} q \Theta M_{m-1} = 0$ , für diejenige der Anzahl der  $r$ - oder mehrgliedrigen Folgen bestimmter Farbe  $M_{m+r+1} - M_{m+r} - p^r q \Theta M_m = 0$ , für diejenige der Anzahl von Tripeln, Quadrupeln usw. bestimmter Farbe

$$M_{m+1} - (1 + p\Theta) M_m + p q \Theta \sum_{r=1}^{s-1} p^{r-1} M_{m-r} = 0.$$

Dabei bedeutet  $s$  die Anzahl der Glieder im  $s$ -tupel,  $p = 1 - q$  die Wahrscheinlichkeit der betreffenden Farbe,  $\Theta = e^t - 1$  und  $t$  das Argument der Erzeugenden  $M_m$ ,  $a_r = \sum p_1 p_2 \dots p_r$  die monomische symmetrische Funktion  $r$ -ten Grades in  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Noack, Albert: A class of random variables with discrete distributions. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 127—132 (1950).

L'A. considera, nel campo reale, la serie di potenze  $f(z) = \sum_{x=0}^{\infty} a_x z^x$ , assoluta.

mente convergente nell'intervallo aperto  $(-r, +r)$ ; ed introduce l'ipotesi che i coefficienti  $a_x$  siano non negativi oppure che siano non negative le espressioni  $(-1)^x a_x$ . Nel primo caso l'A. fa assumere a  $z$  solo valori positivi e minori di  $r$ , nel secondo invece solo valori negativi e maggiori di  $-r$ , di modo che nell'un caso e nell'altro la quantità  $a_x z^x$  risulterà non negativa. — Ciò posto, l'A. definisce la variabile casuale discreta  $\xi$  che assume il valore  $x$  ( $= 0, 1, 2, \dots$ ) con probabilità  $a_x z^x / f(z)$ , e di tale variabile calcola i momenti (rispetto all'origine e rispetto alla media) e i seminvarianti di Thiele. — Successivamente l'A. applica i risultati generali così ottenuti ad alcuni interessanti casi particolari. G. Pompilj (Roma).

Bass, Jean et Paul Lévy: Propriétés des lois dont les fonctions caractéristiques sont  $1/\text{ch}z$ ,  $z/\text{sh}z$ ,  $1/\text{ch}^2z$ . C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 815—817 (1950).

Die Verteilungsdichten der im Titel angegebenen charakteristischen Funktionen sind die geraden Funktionen  $1/2 \text{ch}y$ ,  $\pi/4 \text{ch}^2y$ ,  $x/2 \text{sh}y$  mit  $y = \pi x/2$ . Ihre Momente  $2p$ -ter Ordnung, die  $(2p)!$ -fachen Koeffizienten von  $z^{2p}$  in den Potenzreihen von  $1/\cos z$ ,  $z/\sin z$ ,  $1/\cos^2 z$ , lassen sich zu

$$\frac{4^{p+1} (2p)!}{\pi^{2p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2p+1}}, \quad (4^p - 2) B_p, \quad \frac{4^{p+1} (4^{p+1} - 1)}{2p+2} B_{p+1}$$

mit den Bernoullischen Zahlen  $B_n$  berechnen. Die erste Dichtefunktion wurde bereits 1937 von Kunez angegeben. Sie spielt mit der zweiten, wie der zweitgenannte Verf. unlängst zeigte (dies. Zbl. **34**, 72) bei der ebenen Brownschen Bewegung eine Rolle. Szentmártony (Budapest).

Moran, P. A. P.: The oscillatory behaviour of moving averages. Proc. Cambridge philos. Soc. **46**, 272—280 (1950).

Let  $\{x_i\}$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) be a completely stationary random process with zero mean and finite standard deviation. Consider a linear transformation  $X_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + \dots = T x_i$ , say, where the  $a_i$  form an absolutely convergent series. The „spectral density“  $W'(\theta)$  equals  $1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho_t \cos t \theta$ , where the  $\rho_t$  are the serial correlation coefficients of the series  $\{x_i\}$ . Applying  $k$  times the operator  $T$  we obtain  $X_i^{(k)} = T^k x_i$  and the author proves that, as  $k$  increases, the spectral density of  $X_i^{(k)}$  tends to a step function. Hence he deduces that any finite stretch  $X_1, \dots, X_N$  of the process  $\{X_i^{(k)}\}$  converges in probability to a sum of sine terms, with possibly different phases and amplitudes. More formally, the equation

$$X_i^{(k)} + p_1 X_{i-1}^{(k)} + \dots + p_{2r} X_{i-2r}^{(k)} = 0$$

(where the  $p_i$  depend only on the  $a_i$ ) is approximately satisfied for  $i = 2r + 1, \dots, N$ , the error variance being vanishingly small compared with the variance of the  $X_i^{(k)}$ .

( $r$  is the number of steps in the step function previously mentioned.) — A few examples are given and the author mentions a criterion to judge the asymptotic behaviour of the variance of  $\{X_i^{(k)}\}$ . Finally remarks are made concerning the oscillatory behaviour of the weights of the operator  $T$ . *S. Vajda* (Epsom, England).

**Gnedenko, B. V.:** Über das Gebiet der Anziehung der Normalverteilung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **71**, 425—428 (1950) [Russisch].

Verf. definiert zunächst den Begriff des Anziehungsbereiches der Normalverteilung, und zwar wie folgt. Wenn in einer Folge gegenseitig unabhängiger zufälliger Größen  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  für diese ein und dasselbe Verteilungsgesetz  $F(x)$  gilt, so „sagt man“, daß  $F(x)$  zum Anziehungsbereich der Normalverteilung gehöre, wenn die Verteilungsfunktionen der Summen  $s_n = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n) : B_n$  bei passender Wahl der Konstanten  $B_n > 0$  und  $A_n$  der Normalverteilung

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$  zustreben. Eine Bedingung für die Zugehörigkeit einer Funktion  $F(x)$  zum Anziehungsbereich der Normalverteilung ist bereits 1935 gleichzeitig von drei anderen Autoren aufgestellt worden. Verf. gibt in einem „I. Theorem“ eine solche Bedingung in einer neuen Form. In einem „II. Theorem“ stellt er eine Grenzbedingung für gitterförmig angeordnete zufällige Veränderliche mit einer und derselben Verteilungsfunktion auf, und zeigt in einem „III. Theorem“, daß diese Grenzbedingung von den Funktionen, welche zum Anziehungsbereich der Normalverteilung gehören, erfüllt werden. In einem „IV. Theorem“ gibt er eine, wie die andern, notwendige und hinreichende Bedingung für den Fall, daß die Summanden eine Grenzbedingung erfüllen. *Paul Lorenz* (Berlin).

**Sapogov, N. A.:** Über einen Grenzwertsatz. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **69**, 15—18 (1949) [Russisch].

Es wird das folgende Theorem bewiesen: Es seien  $X_n = (x_{n1}, \dots, x_{nh})$  und  $Y_n = (y_{n1}, \dots, y_{nh})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , zwei Folgen zufälliger  $h$ -dimensionaler Vektoren mit den resp. Summenfunktionen  $F_{nk}(x)$  und  $\Phi_{nk}(x)$  für die Komponenten  $x_{nk}$  und  $y_{nk}$ ; es sei  $\int_{|x| \geq N} d\Phi_{nk}(x) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$  gleichmäßig für alle  $n$ ; die  $\Phi_{nk}(x)$  seien gleichmäßig stetig für alle  $k$  und  $n$ . Gilt dann für alle  $x$  und beliebiges

$$U = (u_1, \dots, u_h): \quad \left| \Pr \left\{ \sum_1^h u_i x_{ni} < x \right\} - \Pr \left\{ \sum_1^h u_i y_{ni} < x \right\} \right| < \alpha_n,$$

so ist

$$|\Pr \{X_n \in I\} - \Pr \{Y_n \in I\}| < \omega(\alpha_n)$$

für jedes  $h$ -dimensionale Parallelepipet  $I$  mit  $\omega(\alpha) \rightarrow 0$  bei  $\alpha \rightarrow 0$ . — Als Anwendung wird ein einfacher Beweis des Grenzwertsatzes von S. N. Bernštejn (Bernstein) [Uspechi mat. Nauk **10**, 65 (1944)] für zweidimensionale Vektoren unter Verwendung des Ljapunovschen Satzes angegeben. — Eine Anwendung für  $h > 2$  wird für eine weitere Arbeit angekündigt. *Hans Richter*.

**Rényi, Alfred:** Sur un théorème général de probabilité. Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble **1**, 43—52 (1950).

In dieser Arbeit wird ein Satz verallgemeinert, welchen Verf. bei anderer Gelegenheit aufgestellt hat (vgl. Verf., dies. Zbl. **33**, 162). Es sei  $P(A)$  eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf einer Menge  $E$ , deren Elemente mit  $\xi$  bezeichnet werden sollen. Weiter sei  $x = x(\xi)$  eine Zufallsvariable,  $e_A(x) = \frac{1}{P(A)} \int_A x dP$  ( $A \subset E$ ),  $e_E(x) = e(x)$ ,  $\sigma^2(x) = e[(x - e(x))^2]$  (Streuung),  $A^x(t)$  die Menge der  $\xi$  in  $E$  mit  $x(\xi) < t$ ,  $V^x(t) = P(A^x(t))$ ,  $V^x[I] = V^x(b) - V^x(a)$ , wenn  $a \leq t < b$  aus dem Intervall  $I = [a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ),  $A^x[I]$  die Menge der  $\xi$  aus  $E$ , für die  $x(\xi)$  in  $I$  ist.

$$V_B^x[I] = \frac{P(A^x[I] B)}{P(B)}, \quad D_B^2(x) = \frac{P(B)}{1 - P(B)} \cdot \frac{\int (V_B^x[I] V^x[I])^2}{V^x[I]}.$$

Diskrepanz von  $x$  in bezug auf  $B$  (Verallgemeinerung des Korrelationskoeffizienten). Verf. definiert nun eine Diskrepanz von  $x$  in bezug auf eine weitere Zufallsvariable  $y$  so:

$$D_y^2(x) = \frac{1}{\sigma^2(y)} \int_B [e_{A^x[I]}(y) - e(y)]^2 V^x[I]$$

( $B: -\infty < t < \infty$ ), wenn  $\sigma^2(y) > 0$ . Ist  $y(\xi) = 1$ , wenn  $\xi$  in  $B$ , sonst 0, so erhalten wir  $D_B^2(x)$ . Sind  $y$  und  $x$  unabhängig, also

$$P(A^x[I_1] \cdot A^y[I_2]) = P(A^x[I_1]) P(A^y[I_2])$$

für jedes  $I_1, I_2$ , so ist  $D_y(x) = 0$ . Es wird nun der Begriff der Fastunabhängigkeit eingeführt. Es sei

$$(1) \quad d(x, y) = \sup \left| \frac{P(A^x[I_1] A^y[I_2])}{P(A^x[I_1]) P(A^y[I_2])} - 1 \right|$$

für alle  $I_1, I_2$ , für die der Nenner in (1)  $\neq 0$  ist. Eine Folge  $\{x_n\}$  heißt paarweise fast-unabhängig, wenn die Form  $Q = \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} d(x_n, x_m) t_n t_m$  beschränkt ist, d. h.

$|Q| / \sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 \leq \Delta$  ist, für alle  $t_i$  mit  $\sum t_i^2 < \infty$ . Es heißt  $\Delta$  der Modul der Abhängigkeit der Folge  $\{x_n\}$ . Sind die  $x_n$  alle paarweise unabhängig, so kann  $\Delta = 0$  genommen werden. Es wird folgender Satz gezeigt: Ist  $\{x_n\}$  eine solche Folge mit dem Modul  $\Delta$ ,  $y$  eine bel. Zufallsvariable auf  $E$ , so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_y^2(x_n) \leq (1 + \Delta) (1 + (e(y)/\sigma(y)^2)).$$

Diese Abschätzung ist scharf. Zahlentheoretische Anwendungen werden angekündigt. (Man vgl. in der oben zitierten Arbeit des Verf. die Anwendung auf das große Sieb von Linnik!)

Hlawka (Wien).

Hille, Einar: Les probabilités continues en chaîne. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 34—35 (1950).

$f(t; \xi, x)$  sei die Dichte der Übergangswahrscheinlichkeit eines nach der Zeit homogenen Prozesses  $X(t)$ , wobei  $f(t; \xi, x) dx + o(dx)$  die Wahrscheinlichkeit für  $x < X(t) < x + dx$  unter der Voraussetzung  $X(0) = \xi$  darstellt. Wegen der Kolmogorovschen Fundamentalgleichung stellen die Ausdrücke

$$(1) \quad S(t; \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t; \xi, x) g(x) dx, \quad g \in C(-\infty, +\infty),$$

$$(2) \quad T(t; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t; \xi, x) h(\xi) d\xi, \quad h \in L(-\infty, +\infty)$$

2 Halbgruppen  $\{S(t)\}$  bzw.  $\{T(t)\}$  positiver Linearoperationen dar. Die erste und zweite Differentialgleichung von Kolmogorov (vgl. auch zum obigen dies. Zbl. 1, 149) ergeben, daß (1) resp. (2) folgenden Differentialgleichungen genügen

$$(3) \quad b(\xi) S_{\xi\xi} + a(\xi) S_{\xi} = S_t, \quad (4) \quad \{[b(x)T]_x - a(x)T\}_x = T_t,$$

$b > 0$ . Es hat sich neuerdings speziell für die praktische Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen als bedeutsam erwiesen, diesen Sachverhalt umzukehren, d. h. zu fragen, ob zu einer vorgegebenen Gleichung eine Dichtefunktion eines stochastischen Prozesses existiert, welche die Gleichung erfüllt. In diesem Sinne formuliert Verf. die folgenden zwei Probleme:  $a(x), b(x)$  seien zweistetige Funktionen mit  $b > 0$  ( $-\infty < x < +\infty$ ),  $C[g] = b(\xi)g''(\xi) + a(\xi)g'(\xi)$   $g \in C[-\infty, \infty]$  ein Differentialoperator und  $L(h)$  ein weiterer, (4) entsprechend. Es sollen nun  $a, b$  so gewählt werden, daß der Operator  $C$  die infinitesimale Transformation einer Halbgruppe  $\{S(t)\}$  ( $0 \leq t < \infty$ ) von Linearoperatoren in  $C(-\infty, \infty)$  wird mit  $\|S(t)\| = 1$ , die  $g(\xi) \equiv 1$  invariant lassen und in starkem Sinne stetig in  $0 \leq t < \infty$  sind, d. h.  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|S(t) - S(t_0)\| g\| = 0$

für alle  $g \in C$  und  $0 \leq t_0 < \infty$  und  $S(0) = 1$ . Sinngemäß lautet das zweite Problem nach Ersetzung von  $C$  durch  $L$  und  $S$  durch  $T$ . Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen (B) für  $a$  und  $b$  an, damit die Probleme eindeutig lösbar sind.  $b(x) = (1 + x^2)^2$ ,  $a(x) \equiv 0$  z. B. erfüllen nicht alle Bedingungen (B). Dann gibt es zwar eine Dichte einer Übergangswahrscheinlichkeit, welche (4) erfüllt, aber es gibt weitere Lösungen aus  $L(-\infty, +\infty)$  bezüglich  $x$ , welche für  $t \rightarrow 0$  im Mittel gegen 0 streben, so daß das Cauchysche Problem mit vorgegebenem  $T(0; x)$  keine eindeutige Lösung ergibt. Die Beweise der Sätze folgen in einer ausführlichen Darstellung.

Schmetterer (Wien).



**Sapogov, N. A.:** Über mehrdimensionale, inhomogene Markoffsche Ketten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 133—135 (1949) [Russisch].

Durch Fortführung von Arbeiten von Bernstein und Linnik wird, unter weitgehend allgemeiner Festsetzung der Anfangsbedingungen, ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit gewonnen, daß eine Folge von  $n$ -dimensionalen Systemen, die sich in vom Zufall abhängiger Weise gemäß einer Markoffschen Kette entwickelt, sich in einem bestimmten Zeitpunkte in einem bestimmten Zustande befindet.

*P. Lorenz (Berlin).*

**Rozenknop, I. Z.:** Über einige Eigenschaften der Gesamtheit der geschlossenen Wege in einem System aus  $n$  Zuständen mit vorgegebenen Übergängen zwischen ihnen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 14, 95—100 (1950) [Russisch].

Es wird an eine Arbeit von Kolmogorov angeknüpft [„Lokale Sätze für die klassischen Markoff-Ketten“, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 13, 281—300 (1949)] und u. a. eine dort von Kolmogorov ausgesprochene Vermutung bewiesen, doch ist Ref. diese Arbeit leider unzugänglich. Verf. interpretiert die Verhältnisse, wie sie bei Markoff-Ketten mit endlich vielen Zuständen liegen, um und stellt Sätze für einen kombinatorischen Vektorkalkül auf. Es sei ein System von  $n$  Punkten  $e_1, \dots, e_n$  gegeben und unter diesen gewisse Paare ausgezeichnet  $(e_\gamma, e_\delta)$ , welche etwa Zeiger genannt werden sollen. Die Gesamtheit der Punkte und Zeiger sei das Schema  $P_\gamma$  (Die Zeiger entsprechen den Übergängen zwischen zwei Zuständen.) Eine Folge  $(e_{\gamma_0}, \dots, e_{\gamma_k})$  nicht notwendig verschiedener Punkte heiße ein Weg, wenn alle Zeiger  $(e_{\gamma_{i-1}}, e_{\gamma_i}), i=1, 2, \dots, k$ ,  $P$  angehören. Der Weg heißt zyklisch, wenn auch  $(e_{\gamma_k}, e_{\gamma_0})$  in  $P$  ist. Den Punkten  $e_i (i=1, \dots, n)$  werden  $n$  beliebige Vektoren des  $R_n$  zugeordnet, jedoch sollen sie den  $R_n$  erzeugen. Sie sollen ebenfalls mit  $e_i$  bezeichnet werden. Dem Weg  $(e_{\gamma_0}, \dots, e_{\gamma_k})$  wird der Vektor  $e_{\gamma_0} + \dots + e_{\gamma_k}$  zugeordnet. Die Koordinaten des Vektors geben offenbar an, wie oft der Weg durch jeden Punkt  $e_{\gamma_i}$  hindurchgeht. Ein Zeiger oder Punkt heißt wesentlich, wenn er mindestens einem Zyklus angehört. Zwei Zeiger, deren Anfangs- oder Endpunkt übereinstimmen, heißen benachbart. Eine Folge von Zeigern  $a_1, \dots, a_k$  soll Kette genannt werden, wenn  $a_i, a_{i+1}$  benachbart sind ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ). Eine bedeutsame Rolle im Weiteren spielt die Klasseneinteilung der Zeiger: Zwei wesentliche Zeiger gehören genau dann einer Klasse an, wenn sie einer Kette angehören, die nur aus wesentlichen Zeigern besteht. (Nur solche Ketten werden untersucht.) Mit dieser Terminologie wird zunächst bewiesen: Wenn  $P$  wenigstens immer einen Zeiger enthält, so daß irgend zwei Punkte  $e_\gamma, e_\delta$  durch einen Weg verbunden werden können, dann gilt  $s = n - r + 1$ , wobei  $r$  die Maximalzahl linear unabhängiger zyklischer Vektoren und  $s$  die Anzahl der Klassen von Zeigern bedeutet. Die Beziehung läßt sich auch auf den Fall ausdehnen, wenn  $P$  nicht wesentliche Punkte enthält. Es folgt der Beweis der Sätze: Wenn der Weg  $g = (e_{\gamma_0}, \dots, e_{\gamma_k})$ , dessen Zeiger sämtlich wesentlich sind, durch Linearkombination zyklischer Vektoren mit reellen Koeffizienten erhalten werden kann, dann gehören die von  $e_{\gamma_k}$  ausgehenden Zeiger und die in  $e_{\gamma_0}$  einmündenden zur selben Klasse, und wenn umgekehrt dieses der Fall ist, dann kann der Vektor  $g$  durch Linearkombination zyklischer Vektoren mit ganzzahligen Koeffizienten erhalten werden. Nun folgt das Hauptergebnis, welches den Beweis der Kolmogorovschen Vermutung darstellt: Alle Vektoren, welche ganzzahlige Koordinaten in bezug auf die gewählten Basisvektoren  $e_i$  besitzen und gleichzeitig als Linearkombination zyklischer Vektoren mit reellen Koeffizienten dargestellt werden können, können auch als ganzzahlige Linearkombination zyklischer Vektoren erhalten werden und umgekehrt. Beziehungen zur Theorie der Graphen werden nicht betrachtet.

*Schmetterer (Wien).*

**Čulanovskij, I. V.:** Über Zyklen in Markoffschen Ketten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 301—304 (1949) [Russisch].

Verf. behandelt unter Verzicht auf eine wahrscheinlichkeitstheoretische Diskussion das folgende von Kolmogoroff als Hypothese aufgestellte Theorem: Wenn ein Vektor im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum, mit ganzzahligen Komponenten überhaupt durch eine lineare Kombination von Vektoren  $L^{(1)}, \dots, L^{(s)}$  (welche Teilmenge einer Menge von Vektoren ist, die aus einer einfachen Markoffschen Kette erhalten werden können) dargestellt werden kann, so ist er durch eine lineare Kombination dieser Vektoren mit ganzzahligen Komponenten darstellbar. Der Beweis wird durch Umformung der Matrix der Komponenten der Vektoren  $L^{(1)}, \dots, L^{(s)}$  erbracht.

*P. Lorenz (Berlin).*

**Dvoretzky, A., P. Erdős and S. Kakutani:** Double points of paths of Brownian motion in  $n$ -space. Acta Sci. math., Szeged 12 B, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 75—81 (1950).

Bezüglich der von einem Punkt ausgehenden Bahnen bei der Brownschen Bewegung (in klassischer Annäherung) zeigte P. Lévy 1940 bzw. Kakutani 1944, daß im Falle von zwei bzw. fünf und mehr Dimensionen fast alle mindestens einen bzw. keinen Doppelpunkt besitzen. Verff. beweisen auf wesentlich neuer Grundlage, daß bei der drei- bzw. vierdimensionalen Bewegung sich diesbezüglich der zwei- bzw. fünfdimensionale Fall einstellt. Sie stützen sich nämlich auf die Hilfssätze, nach welchen die zwischen zwei festen Zeitpunkten zurückgelegten Strecken der von einem Punkt ausgehenden Bahnen bei der dreidimensionalen Bewegung im wesentlichen eine dreidimensionale positive Kapazität, bei der vierdimensionalen dagegen im wesentlichen eine vierdimensionale Null-Kapazität besitzen.

*Szentmártony* (Budapest).

**Wold, H.:** Sur les processus stationnaires ponctuels. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. 13, (Lyon 28. 6.—3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 75—86 (1949).

Es seien  $T_1 < T_2 \cdots T_{h+1}$  willkürlich gegebene Zeitpunkte. Ferner sei  $x(t)$  eine Funktion, die jedesmal um Eins zunimmt, wenn ein Ereignis eintritt.  $z(t)$  ist 1 oder 0, je nachdem, ob (für gegebene Werte  $u_1, \dots, u_h$ )

$$x(T_2 + t) - x(T_1 + t) \leq u_1, \dots, x(T_{h+1} + t) - x(T_h + t) \leq u_h$$

gilt oder nicht. Ein stationärer Punktprozeß ist dann durch die folgende Bedingung definiert:

$$\begin{aligned} (+) \quad & \text{Prob } [x(T_2) - x(T_1) \leq u_1, \dots, x(T_{h+1}) - x(T_h) \leq u_h] \\ & = \text{Prob } [x(T_2 + T) - x(T_1 + T) \leq u_1, \dots, x(T_{h+1} + T) - x(T_h + T) \leq u_h] \end{aligned}$$

für alle  $u_1, \dots, u_h$ . — Ein solcher Prozeß heißt uniform, wenn, mit Wahrscheinlichkeit Eins,

$$((++)) \quad \lim_{t_2 - t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$$

für alle möglichen Abläufe denselben Wert hat. In diesem Falle ist für fast alle Abläufe der Wert  $(+)$  dem Werte  $(++)$  gleich. Verff. behandelt insbesondere die „lokale Nachwirkung“. Diese liegt vor, wenn die Intensität des Eintrittes eines Ereignisses von den Zeitintervallen zwischen früheren Ereignissen und zwischen dem letzten Ereignis und dem betrachteten Zeitpunkt abhängt. Die folgenden typischen Größen werden behandelt: (a) Wahrscheinlichkeit, daß auf ein Ereignis im Zeitpunkt  $t$  ein anderes im Intervall  $(t, t + x)$  folgt, falls das letzte zur Zeit  $t - y$  stattgefunden hat; (b) dasselbe, jedoch ohne die letztere Bedingung; (c) Wahrscheinlichkeit, daß ein Intervall der Länge  $T$ , das mit einem Ereignis beginnt, genau  $n$  Ereignisse enthält; (d) dasselbe, jedoch ohne die Bedingung, daß das Intervall mit einem Ereignis beginnen muß. Zwischen diesen Größen bestehen Zusammenhänge, die die Form von Integralgleichungen haben. Sie können für spezielle Annahmen betr. die grundlegenden Intensitäten gelöst werden, während für den allgemeinen Fall eine Stichprobenmethode zur Lösung angegeben wird. Als Beispiel für die Verwendbarkeit der Theorie wird vor allem das Gebiet des Telefonverkehrs erwähnt. Verallgemeinerungen und Einzelheiten werden für spätere Arbeiten in Aussicht gestellt.

*Vajda* (Epsom, England).

## Statistik:

• **Gebelein, H.:** Zahl und Wirklichkeit. — Grundzüge einer mathematischen Statistik. — 2. Aufl. Heidelberg: Quelle & Meyer 1949. XII, 430 S. mit 52 Abb., Preis DM 12.—.

**Dwinaš, S.:** Über gewisse Determinanten, die in der Statistik gebraucht werden. *Mat. Elemental*, Madrid, IV. S. 8, 79—80 (1948) [Spanisch].

**Bloch, Willy:** Einfache Formel zur Berechnung des Streuungsmaßes. *Industr. Organisation*, Schweiz. Z. Betriebswiss. 19, 38—42 (1950).

Verf. zeigt, daß sich die Streuung einer unsymmetrischen Verteilung, die als Überlagerung zweier gegeneinander verschobener, symmetrischer Verteilungen angesehen werden kann, aus den Streuungen und Mittelwerten dieser symmetrischen Verteilungen nach einer bekannten, einfachen Formel berechnen läßt. *Friede*.

**Hartley, H. O.:** A simplified form of Sheppard's correction formulae. *Biometrika*, Cambridge 37, 145—148 (1950).

Unter der Voraussetzung, daß die  $2k - 1$ -mal stetig differenzierbare Verteilung  $f(x)$  ( $-\infty < a \leq x \leq b < \infty$ ) an den Endpunkten  $a$  und  $b$  Berührungen  $2k - 1$ -ter Ordnung mit der  $x$ -Achse besitzt, erhält Verf. durch Anwendung der Euler-Maclaurinschen Summenformel folgende Darstellung des  $r$ -ten Momentes  $\mu_r$  ( $r = 0, 1, \dots, R \leq k$ ) durch die  $n$  ( $= (b - a)/h$  ganz) Gruppenwahrscheinlichkeiten

$$f_i = \int_{a + (i-1)h}^{a + ih} f(x) dx = P_{i-1} - P_i \quad (i = 1, 2, \dots, n):$$

$$\mu_r = h^r \sum_{i=0}^{n-1} P_i (a + ih)^{r-1} + h^r B_r \left( \frac{a}{h} \right) + S.$$

Die sich durch Weglassen des Restgliedes  $S$  daraus ergebende Näherungsformel ist in der Handhabung bequemer als die entsprechende Sheppardsche Formel, in die sie sich durch eine Transformation überführen läßt. Für die absoluten und gebrochenen Potenzmomente gibt Verf. entsprechende Formeln an und zeigt, daß sich durch ein einfaches zusätzliches Verfahren ähnliche Formeln auch für den Fall erhalten lassen, daß die Voraussetzung über die Berührung in  $a$  und/oder  $b$  nicht erfüllt ist. Über die Genauigkeit der erhaltenen Näherungen geben Formeln für die Restglieder Aufschluß.

*Georg Friede* (Göttingen).

**Walker, Gilbert:** Apparent correlation between independent series of auto-correlated observations. *Biometrika*, Cambridge 37, 184—185 (1950).

**Walsh, John E.:** Concerning compound randomization in the binary system. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. 20, 580—589 (1949).

Verf. gibt ein Verfahren zur Gewinnung binärer Zufallszahlen an. Ausgehend von einer Reihe unabhängiger, fast zufälliger, binärer Ziffern wird durch ein Additionsverfahren eine neue Reihe dieser Ziffern gebildet, in der die absolute Differenz zwischen der Wahrscheinlichkeit für die Ziffer 0 und  $\frac{1}{2}$  kleiner ist als in der Ausgangsreihe. Durch wiederholte Anwendung des Verfahrens läßt sich eine binäre Zufallszahlenreihe mit einer der Gleichverteilung beliebig nahe kommenden Verteilung gewinnen. Gegenüber der von H. Burke Horton (dies. Zbl. 31, 373) angegebenen Methode bietet dieses Verfahren den Vorteil, daß der bei ihm entstehende Verlust an Ziffern geringer ist.

*Georg Friede* (Göttingen).

**Gini, C.:** Le medie dei campioni. *Metron*, Roma 15, 13—28 (1949).

Data una „massa“ di  $m$  valori non negativi  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  si definisce come media combinatoria potenziata di classe  $b$  ed ordine  $p$  la quantità:

$${}^b M_p^p = \sqrt[p]{\binom{m}{b}^{-1} \sum P^b a_i^p}$$

dove  $P^b a_i^p$  indica il prodotto delle potenze  $p$ -me di  $b$  valori  $a_i$  con indici in basso diversi. — Scegliendo a caso, senza ripetizione,  $c$  degli  $m$  valori  $a_i$  si forma un „campione“ di cui si può calcolare l'analoga media combinatoria potenziata, che sarà indicata con:  ${}^b M_c^p$ . Al variare del campione la media varia descrivendo una „variabile statistica“ di cui l'A. dimostra alcune proprietà tra le quali ricorderò le seguenti: a) la media potenziata di grado  $bp$  delle medie  ${}^b M_c^p$  dei campioni coincide



con l'analogia media  ${}^bM^p$  della massa; b) il valor medio di  ${}^bM_c^p$  è maggiore, eguale o minore di  ${}^bM^p$  a seconda che  $bp$  è minore, eguale o maggiore di 1; c) la differenza tra  ${}^bM^p$  e il valor medio di  ${}^bM_c^p$ , quando  $bp$  è diverso da 1, è tanto più grande quanto più piccolo è il numero  $c$  delle determinazioni che formano il campione.

G. Pompilj (Roma).

**Kellerer, Hans:** *Elementare Ausführungen zur Theorie und Technik des Stichprobenverfahrens. II.* Mitteil.-Bl. math. Statistik, München **1**, 203—218 (1949).

Fortsetzung eines gleichnamigen Aufsatzes [Mitteil.-Bl. math. Statistik, München **1**, 96—114 (1949)], in welchem Verf. an Modellbeispielen die Grundbegriffe der Zufallsauswahl, des proportional und des optimal (optimum allocation) geschichteten Auswahlverfahrens und die entsprechenden Formeln für die Streuungen dargelegt hat. Die praktischen Folgerungen hieraus erläutert Verf. ebenfalls an passenden Beispielen: Bestimmung des Umfanges  $n$  einer zufälligen Stichprobe, so daß die Schätzung des Mittelwertes  $M$  der  $N$ -gliedrigen Gesamtheit aus dem Stichprobenmittelwert  $m$  mit vorgegebener Genauigkeit und dem Sicherheitsgrad  $v$  erfolge, nach der Formel

$$n \sim (k^2 \cdot s^2 + d^2) / (d^2 + k^2 s^2 / N),$$

wo  $s$  = Streuung der Grundgesamtheit,  $d$  = zulässige Höchstabweichung  $|m - M|$ ,

$$v = 2 \cdot \int_0^k e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi}$$

ist. Bei proportional geschichteter Auswahl (d. h. Anzahl  $n_i$  der aus der Schicht  $i$  zu wählenden Elemente proportional dem Umfang  $N_i$  der Schicht,  $n_i = n \cdot N_i / N$ ) lautet die entsprechende Formel  $n \sim N \cdot \sum_1^k N_i s_i^2 / \left[ N^2 \sigma^2 + \sum_1^k N_i s_i^2 \right]$ , wo  $s_i$  die Streuung der  $N_i$   $X$ -Werte der  $i$ -ten Schicht um ihren Mittelwert  $M_i$  bedeutet; bei optimaler Auswahl (d. h.  $n_i$  proportional  $N_i s_i$ ), bei welcher die Streuung  $\sigma$  des Stichprobenmittelwertes am kleinsten ist, gilt  $n \sim \left( \sum_1^k N_i s_i \right)^2 / \left[ N^2 \sigma^2 + \sum_1^k N_i s_i^2 \right]$ .

Aus den Relationen

$$\sigma_{\text{prop}}^2 - \sigma_{\text{opt}}^2 \sim \sum_1^k N_i (s_i - s_d)^2 / nN \quad \text{mit} \quad s_d = \sum_1^k N_i s_i / N,$$

$$\sigma_{\text{zuf}}^2 - \sigma_{\text{prop}}^2 \sim \sum_1^k N_i (M_i - M)^2 / nN,$$

die die den drei betrachteten Auswahlprinzipien entsprechenden Mittelwertstreuungen  $\sigma$  miteinander verknüpfen, ist der durch die geschichteten, und speziell durch das optimal geschichtete Auswahlverfahren erzielte Informationsgewinn zu erkennen. — Sodann behandelt Verf. ein spezielles zweistufiges Schichtungsverfahren, bei welchem aus der aus  $k$  je  $N^*$ -gliedrigen Schichten mit Mittelwerten  $M_i$  und Streuungen  $s_i$  bestehenden Gesamtheit zunächst  $K$  Schichten zufällig ausgewählt und aus diesen je  $n^*$   $x$ -Werte ausgewählt werden. Die Varianz der  $\binom{k}{K} \cdot \binom{N^*}{n^*}^K$  Mittelwerte  $m$  der auf diese Weise gebildeten Stichproben lautet

$$\sigma^2 = (N^* - n^*) \sum_1^k s_i^2 / k K (N^* - 1) n^* + (k - K) \cdot \sum_1^k (M_i - M)^2 / k (k - 1) K.$$

Im allgemeineren Falle verschieden umfangreicher Schichten ( $N_i$ ) und verschieden großer Proben aus ihnen ( $n_i$ ) ist

$$A^* = \sum_{\mu=1}^K \left[ N_{\mu} \sum_{\nu=1}^{n_{\mu}} x_{\mu\nu} / n_{\mu} \right] / \sum_{\mu=1}^K N_{\mu}$$

eine erwartungstreue (Übersetzungsvorschlag der Ref. für unbiased) Schätzung von  $M$ . — Für die Herleitung der benutzten Formeln verweist Verf. hauptsächlich

auf: W. H. Cochran, Sampling survey technics (Raleigh, 1948, S. 33—34), M. H. Hansen and W. N. Hurwitz, On the theory of sampling from finite populations [Ann. math. Statist. **14**, 333—362 (1943)], R. C. Geary, [Most efficient sample sizes for the two-stage sampling process in the case of the limited universe, Bern 1949, S. 3].

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Kaloujnine, L.: Quelques idées au sujet du mémoire de M. G. Neymann „L'estimation statistique traitée comme un problème classique de probabilité“. Publ. math., Debrecen **1**, 101—103 (1949).

Exposition and elementary illustration of the theory of confidence intervals. The author proves a „law of large numbers“ concerning the confidence coefficient and mentions a „strong law of large numbers“, the proof of which can easily be supplied.

S. Vajda (Epsom, England).

Pillai, K. C. S.: On the distributions of midrange and semi-range in samples from a normal population. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 100—105 (1950).

If  $x_1$  and  $x_n$  are respectively the smallest and the largest value in a sample of  $n$ , then  $M = (x_1 + x_n)/2$  is called the midrange and  $W = (x_1 - x_n)/2$  the semirange. By integrating the simultaneous distribution of  $M$  and  $W$ , assuming a normal parent distribution, with regard to  $W$ , the series

$$\frac{n(n-1)}{\pi} e^{-nM^2/2} \sum_i B_i M^{2i}$$

is obtained and the author gives a table of the first five  $B_i$  for  $n = 3, 4, \dots, 10$ . Integration with regard to  $M$  leads to a function which can be calculated by a method based on the expansion for the normal probability integral. Tables to facilitate the computation are given.

S. Vajda (Epsom/England).

Link, Richard F.: The sampling distribution of the ratio of two ranges from independent samples. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 112—116 (1950).

The author gives explicitly the sampling distribution of the ratio of the ranges of two independent samples from (1) a rectangular population, (2) a population with density  $e^{-x}$  for positive  $x$ , and (3) a normal population, but in this case only if the sizes of the samples are either 2 or 3. — For a normal parent population the author supplies also numerical tables of values  $R$  such that the probability of the ratio being less than  $R$  equals  $\frac{1}{2}$ , 1,  $2\frac{1}{2}$ , 5 or 10%. The entries of these tables are all possible combinations of sample sizes from 2 to 10. Finally, for equal sample sizes, figures are given which compare the performance of the test based on the range ratio with that of the  $F$ -test.

S. Vajda (Epsom/England).

Huzurbazar, V. S.: Probability distributions and orthogonal parameters. Proc. Cambridge phil. Soc. **46**, 281—284 (1950).

Let  $f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  be the probability density of a distribution. Jeffreys calls the parameters  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  orthogonal, if

$$E\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\right) = 0$$

for all  $i, j$  ( $i \neq j$ ). This concept is of interest, since the maximum likelihood equations for the estimation of orthogonal parameters can easily be solved by iteration. Considering the case where the equations given do not hold, the author investigates the possibility of finding a transformation of the  $\alpha_i$  into new parameters, so that these become orthogonal. — The problem is equivalent to solving  $\binom{n}{2}$  simultaneous partial, non linear, differential equations of the first order for  $n$  functions. For  $n > 3$  there is, in general, no solution, but for Pearson's Type I (four parameters) Jeffreys has given an approximate solution when the asymmetry is small. Regarding  $n = 3$ , the author derives a solution for Pearson's Types II and VII and an approximate answer for Type III. For  $n = 2$  the problem reduces to an ordinary diffe-

rential equation of first order and first degree. If one of the two parameters is either a location or a scale parameter, then either of them can be kept fixed and the resulting differential equation can be solved by separation of the variables. In particular, if the parameters are respectively of scale and of location, then one can be kept fixed and the other made orthogonal by a linear transformation. *S. Vajda.*

**Nair, K. R.:** Efficiencies of certain linear systematic statistics for estimating dispersion from normal samples. *Biometrika*, Cambridge **37**, 182—183 (1950).

**Olekiewicz, M.:** On the efficiency of biased estimates. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska*, Lublin, Sect. A **3**, 103—128 und polnische Zusammenfassg. 129—140 (1949).

The author avoids deliberately insistence on unbiased estimates and introduces the concept of closeness, measured in terms of the expression (A)  $E(\alpha^* - \alpha)^2$ , where  $\alpha^*$  is the estimate and  $\alpha$  the parameter. When bias can be expressed as a linear function of the parameter value,  $b = a\alpha$ , say, then that value of  $a$  can be found, which makes  $(1 + a)\hat{\alpha}$ , with  $\hat{\alpha}$  the most efficient estimate in the sense of Fisher's theory, closest of all possible biased or unbiased estimates. For the variance this „linearly efficient estimate“ turns out to be  $ns^2/(n + 1)$ . Remarks are also made on the replacement of (A) by  $\Sigma |\alpha^* - \alpha|$ . *S. Vajda (Epsom).*

**Birnbaum, Z. W. and Monroe G. Sirken:** Bias due to non-availability in sampling surveys. *J. Amer. statist. Assoc.* **45**, 98—111 (1950).

The authors define the bias  $b$  due to non-availability of respondents in a population as the difference between the fractions of individuals responding „yes“ among those available on the one hand, and among those in the whole population in the other hand. If a sample only is taken, then the sampling error introduced by the use of the ratio of those among all available individuals who responded „yes“ is denoted by  $S$ . The expectation of this ratio and its variance are computed. Moreover, assuming given costs of interviews and call-backs, that sample size and that number of maximum call-backs are determined which minimize the expected total cost under the condition that the probability of  $(S + b)$  being larger than a given „precision“ does not exceed a certain predetermined „probability level“. *S. Vajda (Epsom/England).*

**Hammersley, J. M.:** The unbiased estimate and standard error of the inter-class variance. *Metron*, Roma **15**, 189—205 (1949).

Supponiamo di avere  $N$  osservazioni  $x_{a\alpha}$  distribuite in  $k$  classi ( $a = 1, 2, \dots, k$ ) di cui la  $a$ -ma contiene  $n_a$  determinazioni ( $\alpha = 1, 2, \dots, n_a$ ). Sia inoltre:  $x_a = X_a + \xi_{a\alpha}$  dove  $X_a$  è relativo alla classe  $a$  ed appartiene ad una massa di varianza  $V$ , mentre le  $\xi_{a\alpha}$  appartengono ad una massa di varianza  $v$ . — Si indichi con  $\bar{x}_a$  la media della  $a$ -ma classe e con  $\bar{x}_..$  la media complessiva delle  $N$  determinazioni: dopo di che si definiscono: la varianza tra le classi:

$$M_1 = \frac{1}{k-1} \sum_{a=1}^k n_a (\bar{x}_a - \bar{x}_..)^2,$$

la varianza nelle classi:

$$M_2 = \frac{1}{N-k} \sum_{a=1}^k \sum_{\alpha=1}^{n_a} (x_{a\alpha} - \bar{x}_a)^2.$$

L'A. determina uno stimatore „unbiased“ della varianza „interclasse“  $V$ , della massa da cui provengono le  $X_a$ :

$$\Theta = \frac{N(k-1)}{N^2 - \sum_{a=1}^k n_a^2} (M_1 - M_2)$$

e di tale stimatore determina la varianza. L'A. dimostra inoltre che, a parità di  $N$ , tale varianza è minima quando tutte le classi sono formate da uno stesso numero  $n$



di determinazioni ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ ), e tale numero è l'intero più vicino a  $\frac{NV + (N+1)v}{NV + 2v}$ , tra quelli ne soddisfano la diseuguaglianza  $2 \leq n \leq \frac{1}{2}N$ .

G. Pompilj (Roma).

Lehmann, E. L.: Some principles of the theory of testing hypotheses. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 1—26 (1950).

This is one of the papers which are being presented, from time to time, to a meeting of the Institute of Mathematical Statistics and which give a survey of recent developments in a particular field. The author formulates the problem of testing statistical hypotheses and points out, that the requirement of rejecting with high probability when the hypothesis is untrue, can be made more precise in different ways. One may restrict consideration to some special type of tests — e. g. those which are invariant or unbiased — and study whether a uniformly most powerful test of such type exists. Alternatively, one looks for some optimum property in the large, for which most stringent tests or those which minimize the maximum loss are examples. The method for obtaining optimum tests consists in simplifying the parameter space and, if possible, in reducing the problem to that of testing a simple hypothesis against a simple alternative. Applications to sequential analysis are considered, but non-parametric tests are only mentioned in passing. The bibliography contains 53 titles of papers, some as yet unpublished. S. Vajda.

Wald, A. and J. Wolfowitz: Bayes solutions of sequential decision problems. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 82—99 (1950).

This paper continues the study of sequential decision functions, initiated by A. Wald in this Zbl. **29**, 207 and it generalises some results of the author's „Optimum character of the sequential probability ratio test“ (this Zbl. **32**, 173). — Let  $G(x)$  be a distribution function which is an element of a given class  $\Omega$  and  $\xi$  an a priori distribution on  $\Omega$ . When  $x$  is observed, the decision  $D(x)$  is made and the „loss“, when  $G$  is true, is denoted by  $W(G, D)$ . The number of observations required to make the decision  $D$  when  $x$  was the observed sample is denoted by  $n(x, D)$  (which is constant for the classical non-sequential tests) and if the cost of  $n$  observations is  $c(n)$ , then the expectation of  $W + c$  over the various possible  $x$  is the „risk“  $r(G, D)$ . Furthermore,  $r(\xi, D)$  is the expected value of the risk and  $W(\xi, D)$  that of the loss, over all possible  $G$ . These concepts are more rigorously defined in the paper. — The authors construct a „Bayes solution relative to  $\xi$ “, i. e. a  $D_0$  such that  $r(\xi, D_0) \leq r(\xi, D)$  for all  $D$  and they give a necessary and sufficient condition for any  $D$  to be a Bayes solution, in terms of

$$q^*(\xi) = \inf_D q(\xi, D), \text{ where } n(x, D) \geq 1 \text{ and } q_0(\xi) = \min_D W(\xi, D).$$

The fundamental theorem states that, for any  $D_0$ , the class of all probability measures  $\xi$  for which

$$W(\xi, D_0) = \min_D W(\xi, D) \text{ and } q_0(\xi) \leq q^*(\xi)$$

is convex and that this is equally true, if the equality sign in the last formula is omitted. — It was from a more specialised form of this theorem that the optimum character of the sequential probability ratio test was derived by the authors in the earlier paper mentioned above. Applications to the case of a finite number of  $G$ s and a finite number of  $D$ s are separately considered. S. Vajda (Epsom/England).

Strecker, Heinrich: Die Quotientenmethode, eine Variante der „Variante difference“ Methode. Mitteil.-Bl. math. Statistik, München **1**, 115—130 (1949).

Zur Ausschaltung der zufälligen Schwankungen in Zeitreihen  $y_1, y_2, \dots, y_N$  benutzt man einerseits mechanische Glättungsformeln, die jedoch dem stochastischen Charakter des Problems nicht Rechnung tragen, andererseits analytische Ausgleichung durch vorgegebene Funktionen, deren Parameter nach gewissen Prin-

zipien bestimmt werden. Im Gegensatz hierzu wird bei der von K. Pearson stammenden Differenzenmethode (variate difference method), ausgehend von der Zerlegung des beobachteten  $y_i = m_i + x_i$  in erwartungsgemäßen Anteil  $m_i$  und zufällige Komponente  $x_i$ , die Form der die Erwartungswerte  $m_i = E y_i$  liefernden Funktion nicht festgelegt, sondern von dieser nur verlangt, daß von irgendeinem  $k = k_0$  ab alle höheren Differenzen  $\Delta^k m_i$  praktisch verschwinden. Verf. dehnt diesen Grundgedanken aus auf Zeitreihen der Form  $y_i = m_i(1 + x_i)$ , indem er verlangt, daß es irgendein  $k_0$  gebe, so daß für alle  $k \geq k_0$  der nicht zufällige Anteil  $m_i \Delta^k \log m_i \sim 0$  erfülle. Zur Beurteilung, ob die hiermit äquivalente Gleichung  $\Delta^k (\log y_i) = \Delta^k \log (1 + x_i)$  als erfüllt gelten darf, dient ein dem von R. Zaycoff [Über die Ausschaltung der zufälligen Komponente nach der „Variate-difference“-Methode, Publ. statist. Inst. economic Research, State University of Sofia Nr. 1, 46 S. (1937); dies. Zbl. 16, 414] nachgebildetes Kriterium, das im wesentlichen auf der Differenz  $|\sigma_{k+1}^2 - \sigma_k^2|/\sigma_k^2$  mit  $\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{N-k} (\Delta^k \log y_i)^2 \binom{2k}{k} (N-k)$  beruht. Ist dieses erfüllt für  $k_0 = 2n$ , so wird  $\log m_i$  approximiert durch eine Funktion der Form  $\log F_i = \sum_{j=1}^m b_j \Delta^{2n+2j-2} \log (1 + x_i)$ , deren Koeffizienten  $b_j$  durch die Forderung  $E \{\log (1 + x_i) + \log F_i\}^2 = \text{Minimum}$  bestimmt werden, und wo  $m$  den willkürlich wählbaren Grad der Näherung bezeichnet. Bei  $n = 1$  erhält man als ausgeglichene Erwartungswerte  $m'_i = F_i$  die 3-ten, 5-ten, 7-ten, usw. geometrischen Mittel der benachbarten  $y_i$ , für  $n = 2$  hingegen

$$\text{bei } m = 1: \quad m'_i = \sqrt[35]{y_{i-1}^{12} y_i^{17} y_{i+1}^{12} / y_{i-2}^3 y_{i+2}^3},$$

$$\text{bei } m = 2: \quad m'_i = \sqrt[21]{y_{i-2}^3 y_{i-1}^6 y_i^7 y_{i+1}^6 y_{i+2}^3 / y_{i-3}^2 y_{i+3}^2},$$

usw. Durch geeignete Transformationen läßt sich das Verfahren auch auf Zeitreihen der Form  $y_i = m_i \cdot [1 + (1 \pm x_i)^2]$ ,  $y_i = m_i [1 + \sqrt{1 \pm x_i}]$ ,  $y_i = m_i (1 + e^{x_i})$  anwenden.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

**Howell, John M.:** Control chart for largest and smallest values. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 305—309 (1949).

Anstatt bei Kontrollauswahlen von je  $n$  Stücken eines Kollektivs der zu prüfenden Objekte die Merkmal-Mittelwerte  $\bar{X}$  und den Merkmalumfang  $R$  zu vermerken und auszuwerten, ist es einfacher und fast ebenso genau, Kontrollkarten für die größten und kleinsten Merkmalwerte  $L$  und  $S$  anzulegen, deren Mittelwerte  $L$  und  $S$  seien.  $M = (L + S)/2$  wird auf den Karten als Mittellinie neben den Werten  $L$  und  $S$  aufgetragen.  $a$  und  $\sigma^2$  seien Mittelwerte und Streuung eines normalen Kollektivs, dem die Proben entnommen sind. In Übereinstimmung mit der üblichen Praxis wird die obere Kontrollgrenze mit  $L + 3\sigma_L$ , die untere mit  $\bar{S} - 3\sigma_S$  angenommen, wo  $\sigma_L^2$  und  $\sigma_S^2$  eine Schätzung der Streuung der größten bzw. kleinsten Werte eines Normalkollektivs darstellen. Weiter sei so normiert, daß  $a = 0$  und  $\sigma = 1$ .  $P_1$  sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt der Merkmal-Umfangskarte innerhalb der „3-Sigma“-Kontrollgrenzen liegt (Pearson-Hartley-Tabelle), während  $P_2$  die entsprechende Wahrscheinlichkeit für die Mittelwertkarte sei.  $P_3 = \left[ \int_{-c}^c \varphi(t) dt \right]^n$  mit  $\varphi(t) = 1/\sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß größter und kleinster Merkmalwert beide im Intervall  $-c$  bis  $c$  ( $-c < S, L < c$ ) liegen. Wird  $c$  so gewählt, daß  $P_1 \cdot P_2 = P_3$ , so ergibt sich

$$F(c) = \int_{-\infty}^c \varphi(t) dt = 0,5 + 0,5 \cdot (0,9973 P_1)^{1/n},$$

z. B. für  $n = 3$ :  $c = 2,99$ , für  $n = 5$ :  $c = 3,15$ . Schließlich werden die Anzahlen  $N_1$  bzw.  $N_3$  der Proben für die  $X$  und  $R$ - bzw.  $L$  und  $S$ -Karten berechnet, die mit der Wahrscheinlichkeit 0,99 einen Kontrollfehler aufdecken, und zwar aus  $(P_1 \cdot P_2)^{N_1} < 0,01$  und  $P_3^{N_3} < 0,01$ . — In der Arbeit werden Tabellen für die Konstanten in den Formeln und für verschiedene Stückzahlen gegeben. Die Konstanten und theoretische Grundlagen entstammen am Schluß zitierten Arbeiten anderer Autoren wie Tippett, Pearson, Wilks, Hojo, Daly. R. Günther.

**Finney, D. J.:** The estimation from individual records of the relationship between dose and quantal response. *Biometrika*, Cambridge **34**, 320—334 (1947).

**Fog, David:** Über die Gaußsche Fehlerkurve. *Mat. Tidsskr. A*, København **1949**, 25—34 (1949) [Dänisch].

Wiedergabe eines Vortrages über die Gaußsche Fehlerkurve, ihre Herleitung aus der Binomialverteilung (ausführlich nur für  $p = q = \frac{1}{2}$ ) und den Zusammenhang mit der Theorie der Elementarfehler (die Fehler alle mit denselben zwei gleichwahrscheinlichen Werten  $+\varepsilon$ ,  $-\varepsilon$ ).  
*Bödewadt* (Brunoy).

**Nielsen, K. L. and L. Goldstein:** An algorithm for least squares. *J. Math. Phys.*, Massachusetts **26**, 120—132 (1947).

Zur Lösung der bei der Ausgleichung einer durch Punkte mit äquidistanten Abszissenwerten gegebenen empirischen Kurve nach der Methode der kleinsten Quadrate sich ergebenden Normalgleichungen wenden Verf. ein auf dem von P. D. Crout [A short method for evaluating determinants and solving systems of linear equations with real and complex coefficients. *Trans. Amer. Inst. electr. Eng.* **60**, 1235—41 (1941)] entwickelten Algorithmus beruhendes Verfahren an. Für die Ausgleichung von höchstens 100 Punkten mittels Parabeln bis zur vierten Ordnung sind die bei diesem Verfahren benötigten Hilfswerte in einer Tabelle zusammengestellt.  
*Georg Friede* (Göttingen).

**Fraga Torrejón, Eduardo de:** Die wahrscheinlichste Gerade für ein System von nicht kollinearen Punkten. *Gac. mat.*, Madrid I. Ser. **1**, 135—138 (1949) [Spanisch].

**Mittmann, Otfried M. J.:** Ausgleichsrechnung mit einem Operator. *Math. Nachr.*, Berlin **3**, 102—106 (1950).

Ausgehend von der Streuung der Summe der Größen einer Beobachtungsreihe, die zufälligen, in einer bestimmten Umgebung jedes Beobachtungswertes stochastisch voneinander abhängigen Schwankungen unterworfen sind, definiert Verf. einen dem Streuungs Ausdruck analog gebauten Operator und diskutiert dessen Verwendung zur Ausgleichung von Beobachtungsreihen, im besonderen für die Ausgleichung durch eine Konstante und die Ausgleichung durch eine lineare Funktion der Parameter. Schließlich untersucht er den mittleren Fehler der ausgeglichenen Werte und gibt für ihn außer den vollständigen Formeln auch Näherungsformeln.

*Paul Lorenz* (Berlin).

● **Wiener, Norbert:** Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series with engineering applications. The Technology Press of The Massachusetts Institute of Technology. New York: John Wiley & Sons, Inc., London: Chapman & Hall, Ltd. 1949 163 p. \$ 4.00.

This work contains the first publicly available presentation of some work which the author did during World War II, although papers on the same subject by N. Levinson have already appeared in the *Journal of Mathematics and Physics*, and are reprinted in the present book. It is an attempt at uniting the theory of statistical time series with that of communication engineering. From a mathematical point of view, the problem is as follows. A function  $f(t) + g(t)$  is given for  $t < 0$  and it is required to find a linear operator  $K(t)$  such that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t + \alpha) - \int_0^\infty [f(t - \tau) + g(t - \tau)] dK(\tau)]^2 dt$$

is minimized. When  $g(t) = 0$ , then  $\alpha$  will be taken as positive and the problem is that of prediction; otherwise it is that of linear filters of perturbed data. In the latter case,  $\alpha$  may have any real value. — The tools which the author uses are those of his Generalised Harmonic Analysis [*Acta math.*, Uppsala **55**, 117—258 (1930)]. He shows that the problem can be solved when the autocorrelation functions of  $f(t)$  and  $g(t)$  and their cross-correlation are known. Denoting the autocorrelation



function of  $f(t) + g(t)$  by  $\varphi(\tau)$ , the essential step is the factorisation of the energy density  $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-i u \tau} d\tau$  into two factors  $\Psi_1(u)$  and  $\Psi_2(u)$ , so that  $\Psi_1(u + i v)$  is analytical and bounded for  $v > 0$  and  $\Psi_2(u + i v)$  for  $v < 0$ . — The linear predictor and filter for multiple time series are also dealt with and a final chapter considers various problems which can be solved by the methods of the book.

S. Vajda (Epsom/England).

### Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Ottaviani, Giuseppe: Sull determinazione del tasso di interesse nelle annualità differite e nei titoli. Periodico Mat., IV. S. 27, 174—181 (1949).

Die Bestimmung des Zinsfußes  $i$  im Falle einer unmittelbaren Rente hängt von einer Gleichung der Form

$$a x^{n+1} - (a + 1) x^n + 1 = 0 \quad (x = 1 + i)$$

ab, die bekanntlich mittels einer trigonometrischen Substitution gelöst werden kann (Gauß, Cantelli). Verf. erklärt wie ähnliche (natürlich etwas kompliziertere) Methoden zur Lösung desselben Problems in den Fällen einer aufgeschobenen Rente (Gleichung:  $a x^{n+t+1} - a x^{n+t} - x^n + 1 = 0$ ) und von Wertpapieren [Gleichung:  $a x^{n+1} - (a + j) x^n - x + (1 + j) = 0$ ,  $j$  = nomineller Zinsfuß] anwendbar sind.

Bruno de Finetti (Trieste).

Nesbitt, C. J. and Marjorie L. van Eenam: Rate functions and their role in actuarial mathematics. Record, Amer. Inst. Actuar. 37, 202—222 (1948).

Verff. bezeichnen eine Funktion  $f_{s+t}$  als „Intensitätsfunktion“ (rate function), wenn sie mit vorgegebenem Anfangswert  $f_s$  monoton und differenzierbar ist und der Differentialgleichung (1)  $-df_{s+t} = f_{s+t} \mu_{s+t}^{(T)} dt$  bzw. (2)  $-d \log f_{s+t} = \mu_{s+t}^{(T)} dt$  genügt.

$\mu_{s+t}^{(T)} = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \mu_{s+t}^{(i)}$  ist hierbei eine gegebene „zusammengesetzte Intensität“,  $\mu_{s+t}^{(i)}$  die zur  $i$ -ten Ursache gehörende Änderungsintensität (rate) im Zeitpunkt  $s+t$ , und es ist  $\varepsilon_i = +1$ , wenn es sich dabei um eine Zunahme, und  $\varepsilon_i = -1$ , wenn es sich um eine Abnahme handelt. Für die Intensitätsfunktionen gilt dann, daß sich jede Konstante als Intensitätsfunktion darstellen läßt und das Produkt oder der Quotient zweier solcher Funktionen wieder eine Intensitätsfunktion ist. Zur Berechnung von  $f_{s+n}$  aus dem Anfangswert erhält man aus der Differentialgleichung (2) das Produktgesetz

$$f_{s+n} = \prod_{i=1}^r f_{s+n}^{(i)} \quad \text{mit} \quad f_{s+n}^{(i)} = f_s^{(i)} \exp \left( -\varepsilon_i \int_0^n \mu_{s+t}^{(i)} dt \right),$$

während die Differentialgleichung (1) das Additionsgesetz

$$f_{s+1} = f_s - \sum_{i=1}^r \varepsilon_i d_s^{(i)} \quad \text{mit} \quad d_s^{(i)} = \int_0^1 f_{s+t} \mu_{s+t}^{(i)} dt$$

liefert. Da sich  $d_s^{(i)}$  nicht in jedem Fall exakt bestimmen läßt, werden die von Weck [Record, Amer. Inst. Actuar. 36, 23], Zwinggi (Versicherungsmathematik. Basel, 1945) und Spurgeon (Life contingencies, Cambridge 1932) angegebenen Näherungsmethoden sowie eine lineare Methode zur näherungsweisen Bestimmung von  $d_s^{(i)}$  verallgemeinert und auf ihre Brauchbarkeit hin verglichen. Unter den zum Vergleich gewählten Gesichtspunkten — Lieferung der genauen Gesamtänderung

$d_s^{(T)} = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i d_s^{(i)}$  und bequeme Durchführung der Berechnung — verdienen die von Weck angegebene Methode und die lineare Methode den Vorzug. Da ein großer Teil der Funktionen in der Versicherungsmathematik Intensitätsfunktionen sind, bieten sich hier für die Theorie der Intensitätsfunktionen verschiedene Anwendungsmöglichkeiten.

Georg Friede (Göttingen).

**Perier, Bernard:** Calcul des réserves par la méthode Co et variantes. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français 61, 102—117 (1950).

J. Meier-Hirt [Kombinierte Einzel- und Gruppenrechnung zur Bestimmung des Bilanzdeckungskapitals in der Lebensversicherung. Mitt. Verein. Schweiz. Vers. Math. 43, 75—88 (1943). — Eine Variante zur Ko-Methode. Mitt. Verein. Schweiz. Vers. Math. 45, 83—96 (1945)] hat Verfahren zur unmittelbaren Berechnung des Deckungskapitals für einen Gesamtbestand angegeben, ohne daß die Aufteilung in Gruppen nötig ist. Verf. berichtet über diese Verfahren und stellt fest, daß sie hinsichtlich der Wahl der Interpolationsformeln und der Wahl der zur Berechnung gebrauchten Hilfszinsfüße willkürlich sind. Für Sterbetafeln, die nach Gompertz-Makeham ausgeglichen sind, entwickelt Verf. eine Darstellung der temporären Leibrente nach  $k$  Jahren, durch welche diese Willkür vermieden wird. Durchgeführte Vergleiche der beiden Verfahren von Meier-Hirt mit dem des Verf. zeigen dessen Brauchbarkeit und gute Näherung. Andere Vergleiche ergeben die Anwendbarkeit der „makehamisierten“ Ko-Methode auch dann, wenn dem Makehamschen Gesetz nicht genügt ist.

Härten (München).

**Loisel, Jacques:** Le crédit mutuel et son équilibre financier. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français 61, 21—101 (1950).

„Beschreibende Monographie des Bausparkassenwesens, die in ihrem mittleren Teil eine mathematische Kritik des zinslosen Systems enthält. Dabei geht Verf. allerdings von der Forderung (unter zwei anderen) aus, daß der Sparer bei jeder vorgesehenen Wartefrist nicht ungünstiger gestellt sei, als ob seine Einlagen mit demselben Zinssatz verzinst würden, zu dem er das Leihkapital zu verzinsen habe.

Härten (München).

●**Rouquet la Carrigue, Victor:** Les problèmes de la corrélation et de l'élasticité (Étude théorique autour de la loi de King). I: La position des problèmes. (Actual. sci. industr. Nr. 1039) Paris: Hermann & Cie 1948. 283 p.

Hinsichtlich der Aufstellung des mathematischen Formelapparates im 2. Band (s. nachsteh. Referat) eine vorbereitende umfassende Studie, in welcher Verf. die Beziehungen Angebot  $Q$  — Preis  $P$  und Nachfrage  $q$  — Preis  $p$  untersucht. Dabei geht er nicht auf Gleichgewichtsbedingungen aus, für welche  $Q$  und  $P$ ,  $q$  und  $p$  gleicherweise als unabhängige Veränderliche angenommen werden können; vielmehr sucht er aus den wirtschaftlichen Gegebenheiten heraus die eine Variable als unabhängig, die andere als abhängig zu erkennen. Die „dynamische“ Betrachtungsweise beginnt nach ihm mit dem Aufsuchen des „élément moteur“, der „variable motrice“ (in der Angebot — Preis-Beziehung des Produktionssektors:  $Q$ ). Das führt ihn dazu, in den Mittelpunkt seiner Betrachtungen das Gesetz von King zu stellen, das er als ein Elastizitätsproblem charakterisiert und u. a. in Beziehung zum Weber-Fechnerschen Gesetz bringt.

Härten (München).

●**Rouquet la Carrigue, Victor:** Les problèmes de la corrélation et de l'élasticité (Étude théorique autour de la loi de King). II: Les techniques et leur utilisation. (Actual. sci. industr. Nr. 1043). Paris: Hermann & Cie 1948. 134 p.

Der mathematische Formelapparat, den Verf. in dem ersten, größeren Teil „Die analytischen Methoden“ dieses Bandes aufstellt, besteht in der Hauptsache aus Ausdrücken für die Elastizität und Abwandlungen dieses Begriffes. Zwischen der Elastizität der Nachfrage (im Verbrauchssektor der Wirtschaft)  $\mu' = -dq/q : dp/p$ , der Elastizität der Preise (im Produktionssektor)  $\lambda = -dP/P : dQ/Q$ , der „Inertie“ der Preise  $\varrho = dp/p : dP/P$  und der „Malleabilität“ der Nachfrage  $\beta = dq/q : dQ/Q$  besteht die Beziehung  $\mu' \varrho \lambda = \beta$ . Indem er das Differential durch die Streuung ersetzt, erhält Verf. die neuen Begriffe der „Duktilität“ und der „Kompressibilität“: Ersterer ist schwächer als der der Elastizität (die Preise können noch „duktil“ sein, wenn sie schon nicht mehr elastisch sind); die Negation des zweiten schwächer

als die der Inertie (die Preise können schon inkompressibel sein, wenn sie noch inert sind). Zwischen der Duktilität der Nachfrage  $U = \sigma_q/q : \sigma_p/p$ , derjenigen der Preise  $B = \sigma_p/P : \sigma_q/Q$ , der Kompressibilität der Nachfrage  $V = \sigma_q/q : \sigma_q/Q$  und der Preise  $T = \sigma_p/p : \sigma_p/P$  besteht die Beziehung  $V = BTU$ ; entsprechend zwischen den Korrelationskoeffizienten  $r$  von  $P, Q$ ,  $r'$  von  $p, P$ ,  $r''$  von  $p, q$  und  $r'''$  von  $q, Q$  die Beziehung  $r''' = r' r''$ . — Verf. gibt schließlich analytische und graphische Bedingungen dafür an, daß das Gesetz von King gilt, daß nämlich ein nicht-proportionaler Effekt auftritt (z. B. Preise sich nicht proportional zu den Änderungen des Angebotes ändern).  
Härten (München).

**Hawkins, David and Herbert A. Simon: Note: Some conditions of macroeconomic stability.** *Econometrica*, Chicago 17, 245—248 (1949).

Als Richtigstellung und Erweiterung eines Satzes aus einer Arbeit gleichen Titels (dies. Zbl. 33, 296) wird der Satz bewiesen: Dafür, daß die der Gleichung

$\sum_{j=1}^m a_{ij} - k_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$  mit  $a_{ij} < 0 \quad (i \neq j)$ ,  $a_{ii} > 0$  und  $k_i > 0$  genü-

genden  $x_i$  sämtlich positiv sind, ist notwendig und hinreichend, daß alle Hauptminoren der Matrix  $(a_{ij})$  positiv sind. Die wirtschaftliche Interpretation des Satzes besagt: 1. Wenn die Produktionsgleichungen die Produktion einer bestimmten Zusammenstellung von Konsumtionsgütern gestatten, dann auch die einer beliebigen Zusammenstellung, 2. Die Industriegruppe, die einer Unterdeterminante entspricht, muß (wenn alle Hauptunterdeterminanten  $> 0$  sind) imstande sein, mehr anzubieten, als sie selbst an Gütern dieser Gruppe braucht. Im Falle eines homogenen Systems mit Determinante 0 muß sie gerade das anbieten können, was von ihr selbst und den anderen Industrien der Wirtschaft nachgefragt wird.  
R. Günther.

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

●Efimov, N. V.: **Höhere Geometrie.** 2. teilw. umgearb. Aufl. Moskau-Leningrad: OGIZ, Staatsverlag f. techn.-theoret. Literatur 1949. 502 S. R. 13,75 [Russisch].

Die erste Auflage des vorliegenden Buches ist im Jahre 1944 erschienen. Das Werk zerfällt in 2 annähernd gleichgroße Teile, den einen über Grundlagen der Geometrie, den anderen über projektive Geometrie. Das erste Kapitel des ersten Teiles beginnt mit den Axiomen und Postulaten Euklids, wobei auf das 5. Postulat besonderes Augenmerk gerichtet wird und ein kurzer Abriß der Geschichte der NE-Geometrie geboten wird. Kap. 2 bringt die Hilbertschen Axiome, wobei eine russische Übersetzung der 7. Auflage des Hilbertschen Buches zugrunde liegt. Kap. 3, betitelt „Nichteuklidische Parallelen-theorie“, bringt dann auf 80 Seiten eine elementare Behandlung der hyperbolischen Geometrie, und zwar nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raum; die Darstellung schließt sich etwas an Lobachevskij selbst an und zieht auch besonders die Sphären im hyperbolischen Raum, wie die Grenzkugel, in den Kreis der Betrachtung. Die Frage der Widerspruchsfreiheit der ebenen NE-Geometrie wird mittels der Poincaréschen Halbebene auf die entsprechende Frage der euklidischen Geometrie zurückgeführt. Im Kapitel 4 wird dann diese Frage im Anschluß an die Hilbertsche Behandlung dieser Dinge auf die der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zurückgeführt. Das nächste und letzte Kapitel des ersten Teils bringt dann die differentialgeometrische Einführung der NE-Geometrie nach Beltrami, ferner die Theorie der ebenen euklidischen und nichteuklidischen Raumformen. Nach Aussage der Einleitung ist dies Kapitel gegen die erste Auflage besonders stark verändert worden; es ist in kleinerem Druck geschrieben und gilt als nicht unumgänglich nötig für den Normalleser des Buches. — Der 2. Teil bringt eine vollständige Einführung in die projektive Geometrie. Auf



axiomatischer Grundlage werden auf Grund von Doppelverhältnissen und Stetigkeitsforderungen in üblicher Weise projektive Koordinaten eingeführt, das Dualitätsprinzip erläutert, Involutionen besprochen und die Örter 2. Grades klassifiziert. Im allgemeinen wird dabei jedoch der Fall der Ebene nicht überschritten. Das Schlußkapitel bringt dann die gruppentheoretische Behandlung der projektiven Geometrie und der wichtigen Untergruppen der projektiven Gruppe im Sinne von Kleins Erlanger Programm. Dabei erscheinen die NE-Geometrien erneut im Zusammenhang der projektiven Maßbestimmung. Das Buch bringt somit alle 3 wichtigen Einführungen in die Lobačevskijsche Geometrie, die elementare, die differentialgeometrische und die projektive. *Buran (Hamburg).*

**Tibiletti, Cesarina:** *L'evoluzione della geometrica secondo le idee di Klein.* Periodico Mat., IV. S. 28, 13—27 (1950).

**Libois, Paul:** *Synthèse des axiomatiques de l'algèbre et des géométries projective affine et affine centrale.* Assoc. Française Avanc. Sci., Math. 64, 77—82 (1947).

Nach kurzen (unvollständigen) historischen Ausführungen und einigen kritischen Bemerkungen über die Ansätze von Staudts und über die seit Hilbert übliche Darstellung des Zusammenhanges zwischen abstrakter Geometrie und Koordinatenkörper setzt der Verf. der vorliegenden Note seine Ansichten über eine Angleichung geometrischer und algebraischer Axiomatik auseinander. *Sperner (Bonn).*

**Sperner, Emanuel:** *Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung.* S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1949, Nr. 10, 38 S. (1949).

Ein Bericht, den der Verf. über diese Arbeit gegeben hatte, wurde bereits im Zbl. 32, 177 referiert. Ergänzend sei bemerkt, daß die Arbeit einen Beweis der Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie für Schiefkörpergeometrien enthält: Zwei Quadrupel lassen sich dann und nur dann durch eine Kette von Perspektivitäten ineinander überführen, wenn ihre Doppelverhältnisse durch Transformation mit einem Element des Schiefkörpers auseinander hervorgehen. *Bachmann (Kiel).*

**Dequoy, Nicole:** *Exposé d'un type de raisonnement en mathématique intuitioniste sans négation et résultats obtenus pour la géométrie projective plane.* C. r. Acad. Sci., Paris 230, 357—359 (1950).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 32, 423) hat Verf. die Konstruktion des Axiomensystems der ebenen projektiven Geometrie auf Grund der intuitionistischen negationslosen Logik von Griss skizziert. Sie will nun zeigen, daß es möglich ist, mit den in dieser Logik zugelassenen Deduktionsmitteln die projektive Geometrie aus den Axiomen zu entwickeln, und gibt Resultate bezüglich der Kollineation und der Projektivitäten. Sie behauptet, daß man wie im klassischen Fall auf der Geraden eine Punktrechnung definieren kann und daß für diese Rechnungsregeln die Punkte einen Körper bilden. Zu dem Zweck wird ein Beispiel gegeben einer gemäß der abgeänderten Logik notwendig modifizierten Schlußweise. Man könnte bemerken, daß der Wert dieser und ähnlicher Mitteilungen ziemlich fraglich ist, wenn man nicht peinlich genau die Theorie in ihrer ganzen Breite entwickelt. Dazu genügen nicht einige apodiktische Noten, zumal auch eine kritische Klärung der negationslosen Logik noch aussteht. *J. C. H. Gerretsen (Groningen).*

**Schilling, Friedrich:** *Die Brennpunkteigenschaften der sphärischen Ellipse und ihre Übertragung auf die ebene nichteuklidische elliptische Geometrie.* Math. Ann., Berlin 121, 405—414 (1950).

Wenn man eine sphärische Ellipse auf einer Kugelfläche definiert als die Schnittkurve der Fläche und eines Kegels zweiter Ordnung mit der Spitze im Kugelmittelpunkt, so lassen sich, wie Verf. in dieser dem Gedächtnis von Felix Klein gewidmeten Arbeit zeigt, viele der elementaren Brennpunkteigenschaften einer gewöhn-

lichen Ellipse auf die oben erwähnten Figuren übertragen. Ohne Mühe erhält man daraus die entsprechenden Sätze für Ellipsen der elliptischen Geometrie.

*J. C. H. Gerretsen (Groningen).*

**Schilling, Friedrich:** Die Brennpunkteigenschaften der eigentlichen Ellipse in der ebenen nichteuklidischen hyperbolischen Geometrie. Math. Ann., Berlin 121, 415—426 (1950).

Diese Arbeit schließt sich der vorsteh. referierten an. Es werden nun die Brennpunkteigenschaften einer eigentlichen Ellipse in der hyperbolischen Ebene untersucht und es stellt sich heraus, daß auch in diesem Falle eine merkwürdige Analogie mit der gewöhnlichen Ellipse besteht. — Verf. fürchtet die etwas langweiligen elementaren Rechnungen nicht. Es würde sich lohnen zu versuchen, die Ergebnisse mit synthetischen Hilfsmitteln zu erzielen.

*J. C. H. Gerretsen (Groningen).*

**Nestorovič, N. M.:** Über die Äquivalenz eines Hyperzykels mit einem gewöhnlichen Zykel bei Konstruktionen in der Lobačevskijschen Ebene. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 731—734 (1949) [Russisch].

Verf. zeigt, daß man die üblichen Aufgaben 2. Grades der Elementargeometrie, wie Lote zeichnen, Strecken und Winkel halbieren usw., in der hyperbolischen Ebene mit Hilfe von Hyperzykeln ausführen kann. Nachdem er früher gezeigt hatte, daß hierzu statt gewöhnlicher auch Grenzkreise genommen werden können, ist nunmehr die Gleichberechtigung aller 3 Kreissorten der NE-Ebene als konstruktiver Hilfsmittel erwiesen. Zum Zeichnen von Hyperzykeln, den sog. Abstandslinien, läßt sich ein fester Rechtswinkel benutzen, dessen einer Schenkel auf der zur Abstandslinie gehörigen Geraden gleitet.

*Burau (Hamburg).*

**Giršovič, M. V.:** Über geometrische Konstruktionen in der Lobačevskijschen Ebene. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 757—759 (1948) [Russisch].

Satz 1 des Verf. lautet: Alle Konstruktionen mit nichteuklidischem Zirkel und Lineal, wenn man sie in der Poincaréschen Halbebene, d. h. einem euklidischen Bilde der NE-Geometrie, durchführt, können auch mit euklidischem Zirkel und Lineal durchgeführt werden. Satz 2 enthält die Umkehrung davon. Der Beweis gestaltet sich recht einfach, indem man mit geeigneten Inversionen arbeitet, wodurch gegebenenfalls euklidische Geraden und Kreise in nichteuklidische übergeführt werden und umgekehrt.

*Burau (Hamburg).*

**Timpanaro, Seb.:** Le interpretazioni della geometria non euclidea. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 82—85 (1950).

## **Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:**

● **Fabrieius-Bjerre, Fr.:** Lehrbuch der Geometrie. I. Abbildungslehre. Analytische Geometrie. Kopenhagen: Jul. Gjellerup 1947. VIII, 263 S.; 32,00 Kr. [Dänisch].

● **Fabrieius-Bjerre, Fr.:** Lehrbuch der Geometrie. II. Differentialgeometrie. Kinematische Geometrie. Kopenhagen: Jul. Gjellerup 1948. VIII. 212 S.; 27,50 Kr. [Dänisch].

Das dem Ref. zur Besprechung vorliegende Werk ist an der Technischen Hochschule in Kopenhagen als Lehrbuch der Geometrie eingeführt. Das bedeutet einerseits, daß die dortigen Dozenten bei ihren geometrischen Vorlesungen bezüglich Stoffauswahl und Art der Darstellung sich sehr genau an dieses Buch zu halten haben und daß andererseits die Studenten bei den öffentlichen Prüfungen den Inhalt des Werkes bis in die Einzelheiten hinein beherrschen müssen. Dabei ist zu beachten, daß auch die Studenten der reinen Mathematik an der Universität ihre Anfängervorlesungen an der Technischen Hochschule hören. Es leuchtet ein, daß an ein solches Lehrbuch ganz andersartige Anforderungen gestellt werden als etwa an ein deutsches. Nicht ein hervorstechend eleganter, neuartiger, irgendwie überraschender Vortrag ist erwünscht, sondern eine in gewisser Weise „allgemein gültige“, dem Techniker leicht faßliche und doch auch den reinen Mathematiker befriedigende Art der Darstellung ist notwendig. Ganz besonders wichtig erscheint die richtige Auswahl des Stoffes. Dem Vorwort des Werkes ist zu entnehmen,



daß die Auswahl der behandelten Gebiete vom Verf. unter ausgiebiger Berücksichtigung der Wünsche der Techniker vorgenommen wurde. Dies gereicht denjenigen Lesern des Buches zum Vorteil, welche nicht reine Mathematiker werden wollen und den angehenden reinen Mathematikern entsteht sicherlich kein Nachteil. Das Werk enthält genau dasjenige, was jeder, der heutigentags mit der Mathematik in Berührung kommt, unbedingt von der Geometrie wissen muß, es enthält aber auch nicht mehr. Der Stil ist sachlich schlicht, beiläufige Bemerkungen, auch historische Hinweise fehlen gänzlich. Nicht ganz 300 völlig durchgeführte Beispiele und 394 Aufgaben (ohne Lösungen) sorgen dafür, daß der Leser bei eingehendem Studium des Buches niemals das Gefühl verliert, auf dem festen Boden der Tatsachen zu stehen. Rund 300 Abbildungen tragen noch außerdem zu besserem Verständnis bei.—Im 1. Abschnitt des Lehrbuches wird der Leser im Rahmen einer Einführung in die Darstellende Geometrie u. a. mit den Begriffen Affinität, Projektivität, Doppelverhältnis, Pol, Polare, Polarität ... vertraut gemacht. Der 2. Abschnitt handelt von der Analytischen Geometrie des 2- und 3-dimensionalen Raumes. Einleitend wird das Rechnen mit Vektoren des 3-dimensionalen Raumes begründet. (Die lineare Algebra wird in der Analysis behandelt.) Sodann wird unter ausgiebiger Benutzung der Vektorschreibweise und auch besonders des Vektorproduktes die Theorie der Gradén (auch lineare Komplexe) und Ebenen gebracht. In einem weiteren Kapitel werden fußend auf Resultaten der Analysisvorlesung über Transformation von quadratischen Formen, die hier nicht hergeleitet sind, die Kegelschnitte und die Flächen 2. Ordnung klassifiziert. Spezielle algebraische Kurven und Flächen höherer Ordnung werden besprochen. Schließlich werden die Begriffe „lineare Vektorfunktion“ und „Tensor“ kurz erläutert und auf den Zusammenhang mit der Theorie der Flächen 2. Ordnung hingewiesen.—Der 1. Abschnitt des 2. Bandes bringt eine Einführung in die Differentialgeometrie. Ebene Kurven und Raumkurven (Frenetsche Formeln) werden behandelt. Die Flächentheorie wird bis zur Einführung der Krümmung mit Hilfe der beiden Grundformen gefördert. Das Theorema egregium wird formuliert, aber nicht mehr bewiesen. Im letzten Abschnitt des Buches wird eine Einführung in die Kinematik gegeben, ein mathematisch interessantes Gebiet von großer Bedeutung natürlich vor allem für die Physik (z. B. Coriolisbeschleunigung). Ein Anhang, der auf Wunsch der Dozenten der Elektrotechnik beigelegt ist, behandelt die Inversion an Kreis und Kugel. *Maack* (Hamburg).

• **Lopšić, A. M.:** Analytische Geometrie. Für die physikalisch-mathematischen Fakultäten der pädagogischen Institute. Moskau: UČPEDGIZ, Staatsverlag für Unterricht u. Pädagogik des Bildungsministeriums der RSFSR 1948. 576 S. 15 R. [Russisch].

Das vorliegende Buch legt, wie es aus der Einleitung hervorgeht, großen Wert darauf, einem Anfänger eine leicht faßliche, auch zum Selbststudium brauchbare Einführung in das Gebiet zu geben, wobei die abstrakt-algebraische und streng logische Behandlung der Dinge bewußt hinter einer anschaulich geometrischen Darstellung des Stoffs zurücktritt, die den Leser schrittweise einführt und dabei auch vor gewissen Wiederholungen nicht zurückschreckt. Hieraus erklärt sich der Umfang von 567 Seiten und die große Zahl von 254 dem Text beigegebenen Figuren. Dem Umfang des Stoffs nach geht das Buch nicht über die metrische und affine Geometrie bis zu 3 Dimensionen hinaus; es entspricht von den deutschen Büchern am meisten den Werken von K o m m e r e l l und stellt den denkbar größten Gegensatz zu der Art der Behandlung bei S c h r e i e r - S p e r n e r dar. In dem vorgegebenen Rahmen wird jedoch alles mit größter Sorgfalt behandelt und überall zwischen affinen und metrischen Eigenschaften genau unterschieden. — Die ganze erste Hälfte des Buches, Kap. 1–6 behandelt nur die ebene Geometrie, mitsamt einer ausführlichen Kegelschnittslehre. Vieles von diesem Stoff findet sich auch sonst in Schul-lehrbüchern, jedoch tritt neben die übliche Verwendung kartesischer Koordinaten bereits von Anfang an die Benutzung von Vektoren und schiefwinkligen Koordinaten in dem vorliegenden Werk. Nachdem die Vektoren in der Ebene bereits im ersten Kapitel eingeführt worden waren, greift das Kap. 7 nochmals die Vektoralgebra, diesmal im  $R_n$ , auf, wobei auch dreireihige Determinanten auftreten; die Formeln für die Koordinatendrehung werden dann abgeleitet. Die Flächen 2. Grades werden zunächst in Kap. 9 als geometrische Örter gestaltlich eingeführt; nachdem in Kap. 10 und 11 Ebenen und Geraden mit allen möglichen Lagebeziehungen behandelt worden sind, bringt dann erst das umfangreiche Kap. 12 eine affine und metrische Klassifikation der allgemeinen Gleichungen 2. Grades. Das letzte kurze Kapitel enthält erst eine systematische Zusammenstellung der linearen Vektorabbildungen mit ihren kennzeichnenden Eigenschaften, wenn sie affin oder metrisch sind. Die Tatsache, daß diese Dinge bei der modernen rein algebraischen Behandlung der analytischen Geometrie (vgl. etwa das Buch von S p e r n e r) einem ganz anders eingestellten und interessierten Leserkreis gleich zu Beginn vorgesetzt werden, beleuchtet die großen Unterschiede in der Behandlung dieses Gebietes. Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß die jedem Kapitel reichlich beigegebenen Aufgaben eine Fülle guten Unterrichtsmaterials darstellen. *Bureau* (Hamburg).

**Hood, F. T.:** Duality and differential calculus in the plane. Math. Mag., Texas 23, 235—243 (1950).



Lagrange, René: Sur les produits d'inversions. Acta math., Kopenhagen 82, 1—70 (1950).

Die vorliegende Arbeit führt die in den vorhergehenden Noten [C. r. Acad. Sci. Paris, 228, 531—533 (1949) und dies. Zbl. 31, 68] angedeuteten Untersuchungen ausführlich durch. Im ersten Kapitel wird dem mit der Masse  $k$  versehenen Punkt  $A$  des  $R_N$  die skalare Orts-

funktion  $kA = k \frac{\overline{AP}^2}{2}$  zugeordnet, und als Produkt der beiden mit der Masse  $k$  und  $h$  be-

hafteten Punkte  $kh(A, B) = kh \frac{\overline{AB}^2}{2}$  definiert. Der Sphäre  $U$  mit der Masse  $k$ , dem Mittel-

punkt  $A$  und Radius  $R$  wird dann die Ortsfunktion  $kU = k \frac{\overline{AP}^2 - R^2}{2R}$  zugeordnet. Das

Produkt  $(U, B)$  der Sphäre  $U$  von der Masse 1 mit dem Punkt  $B$  ist dann die durch  $2R$  dividierte, sog. reduzierte Potenz von  $B$  bez.  $U$ . Durch einen Grenzprozeß kommt man von hier aus auch dazu, den mit der Masse  $k$  behafteten Hyperebenen  $E$  die mit  $k$  multiplizierte Entfernung des variablen Punktes von  $E$  als skalare Funktion zuzuordnen. Diese so den Punkten, Sphären und Hyperebenen zugeordneten Funktionen ergeben nun bei Linearkombination wieder solche; speziell bedeutet  $\sum k_i A_i$  im allgemeinen eine bestimmte Sphäre  $U$  um den Schwerpunkt  $O$  der in der Summe vorkommenden Massenpunkte mit den Massen  $k_i$ . Masse und Radius von  $U$  lassen sich bei  $\sum k_i \neq 0$  leicht berechnen, während bei  $\sum k_i = 0$  eine Hyperebene herauskommt, die auch unendlich fern sein kann. Ist  $\sum h_j B_j$  einer anderen derartigen Massenkugel zugeordnet, so wird durch  $\sum S(h_j B_j) = \sum k_i h_j A_i B_j$  eine Skalarfunktion als Produkt beider Sphären eingeführt. Ihr Wert ist gleich dem Produkt der Massen beider Sphären mit dem  $\cos$  ihres Schnittwinkels. Diese Produktdefinition gilt auch für die Grenzfälle, wo eine oder beide Sphären in Punkt oder Hyperebene entartet sind, und fällt z. B. im Fall zweier Punkte mit dem schon vorher eingeführten Produkt zusammen. Wichtig ist dann die Tatsache, daß man jede Sphäre  $S$  auf  $\infty^1$  verschiedene Weisen als Linearkombination zweier Punkte  $A_1, A_2$  darstellen kann, wobei  $A_1$  und  $A_2$  dann invers zueinander bez.  $S$  sein müssen.—Im Kapitel II werden zunächst die Formeln für die Inversion an der Kugel  $U$  entwickelt. Aus der letzten Bemerkung zu Kapitel I ergibt sich sofort, daß die zueinander inversen Punkte  $M$  und  $M'$  durch die Formel  $M' = M - 2(UM)U$  verknüpft sind, eine entsprechende Formel verknüpft 2 durch Inversion auseinander hervorgehende Sphären. Hieraus ergeben sich dann weiter Formeln für die Transformation, die durch Zusammensetzung der Inversionen an den  $n$  Sphären  $U_1, U_2, \dots, U_n$  entsteht. Daraus ergibt sich, daß die  $n$  gegebenen Sphären  $U_i$   $n$  weitere Sphären  $V_i$  definieren, die ihrerseits auf dieselbe Weise zu den  $U_i$  führen. Es ist dabei  $U_n = V_n, V_i$  nur von  $U_i, \dots, U_n$  abhängig, und das Inversionsprodukt  $U_1 \cdots U_n$  ist invers zum Produkt  $V_1 \cdots V_n$ . Der wesentliche weitere Inhalt des Kapitels ist dann die Suche nach den Bedingungen dafür, daß  $U_n \cdots U_1$  eine Ähnlichkeitstransformation ist. Zur Beantwortung dieser Frage wird erst nachgewiesen, daß in solchem Falle die Masse jedes Punktes mit einer festen, von diesem Punkt unabhängigen Konstante multipliziert wird. Daraus ergeben sich dann folgende Bedingungen dafür, daß  $U_n \cdots U_1$

eine Ähnlichkeitstransformation ist:  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i R'_i} = 0$  und die Vektorgleichung  $\sum_{i=1}^n \frac{A_i \vec{A}_i}{R_i R'_i} = 0$ ,

wobei  $A_i, R_i$  die Mittelpunkte und Radien der  $n$  Sphären  $U_i$  und  $R'_i$  die Radien der vorher eingeführten zugeordneten  $n$  Sphären  $V_i$  bedeuten. Die niedrigsten Fälle von  $n$  werden sorgfältig gesondert diskutiert. Z. B. müssen bei  $n = 4$  die 4 Punkte  $A_1, \dots, A_4$  eine Ebene aufspannen,

und folgende Vektorbeziehung muß gelten:  $\frac{R_2}{A_1 A_2} A_1 \vec{A}_2 + \frac{R_3}{A_2 A_3} A_2 \vec{A}_3 + \frac{R_4}{A_3 A_4} A_3 \vec{A}_4 = 0$ , worin

auch die trivialen Fälle  $A_1 = A_2$  und  $A_3 = A_4$  (je 2 konzentrische Sphären) stecken.—Das Kapitel III beschäftigt sich dann mit der Lösung der Frage, wann ein Inversionsprodukt  $U_n \cdots U_1$  eine Homothetie, d. h. eine zentrale Ähnlichkeitstransformation, ist. Zu den in Kapitel II festgestellten Bedingungen treten dann noch folgende, die besagen:

$$\frac{1-\varepsilon}{2} A_1 \vec{M} = \sum \frac{(A_1 \vec{A}_i, A_1 \vec{M})}{R_i R'_i} A_n \vec{A}_i$$

gilt stets entweder für  $\varepsilon = 1$  oder  $\varepsilon = -1$ , wobei  $M$  ein laufender Punkt des  $R_N$  ist. Es ergibt sich, daß in dem Sonderfall, wo die Punkte  $A_i$  auf einer Geraden liegen, bereits die Bedingungen für die Ähnlichkeitstransformation die Homothetie zur Folge haben, während im Falle der linearen Unabhängigkeit der Zentren  $A_i$  mindestens  $N + 2$  Sphären vorhanden sein müssen, um die Bedingung dieses Kapitels zu erfüllen. Es werden dann noch weitere Untersuchungen über die Konfigurationen der Punkte  $A_i$  angestellt und auch der allgemeinere Fall ins Auge gefaßt, wo von den Vektoren  $A_1 \vec{A}_i$  nur  $q$  linear unabhängig sind. Speziell der Fall  $q = \frac{1}{2}(n - 2)$  mit den dann bestehenden algebraischen Beziehungen zwischen den Kon-

stanten des Problems wird näher untersucht. Nebenbei ergibt sich, daß  $N + 2$  wechselseitig orthogonale Sphären das einzige System bilden, bei dem das Produkt der Inversionen gleich der Identität ist. — Das Kapitel IV ist schließlich der Untersuchung der Bedingungen gewidmet, die erfüllt sein müssen, wenn das gegebene Inversionsprodukt gleich einer Inversion ist. Es ergibt sich wieder eine Reihe von vektoriellen Bedingungen für die Verbindungsvektoren der Mittelpunkte, die hier nicht wiedergegeben werden können. Verlangt man, daß die  $n$  Mittelpunkte einen  $R_{n-1}$  aufspannen, so erfüllt nur das System von  $N + 1$  Orthogonalsphären die gewünschte Bedingung. Burau (Hamburg).

**Hohenberg, Fritz:** Die linearen und quadratischen Gebilde der komplexen affinen Ebene. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 157, 177—236 (1949).

Es werden reelle Modelle der ins Komplexe erweiterten affinen Ebene  $E$  aufgesucht, indem die komplexen affinen Punktkoordinaten  $z_1$  und  $z_2$  je in einer Gaußschen Zahlenebene  $E_1$  und  $E_2$  gedeutet werden. Dadurch entsprechen den komplexen Punkten von  $E$  1. bei vereinigter Lage von  $E_1$  und  $E_2$  die reellen Punktepaare einer Ebene  $E_{12}$ , 2. bei paralleler Lage von  $E_1$  und  $E_2$  die Strahlen eines Raumes  $S$ , die die Bildpunkte  $z_1$  und  $z_2$  verbinden, und 3. bei ganznormaler Lage von  $E_1$  und  $E_2$  in einem vierdimensionalen Raum  $R$  dessen reelle Punkte. — Einer komplexen Affinität in  $E$  entspricht in  $R$  eine spezielle reelle Affinität, in  $S$  eine spezielle quadratische Strahltransformation, insonderheit eine spezielle reelle Kollineation, wenn in  $E$  reelle Richtungen in ebensolche übergehen. — Es werden sodann der Reihe nach die ein-, zwei- und dreidimensionalen linearen Kettengebilde in der komplexen affinen Ebene  $E$  betrachtet, bei denen  $z_1$  und  $z_2$  als lineare Polynome in ein, zwei oder drei reellen Parametern definiert sind. Ihnen entsprechen in  $E_{12}$  ähnliche Punktreihen, Affinitäten, Zentralkorrelationen, in  $S$  Strahlscharen, Strahlnetze, Strahlgewinde und in  $R$  Geraden, Ebenen, Hyperebenen. Analog bestehen bei den quadratischen Kettengebilden Beziehungen zur Veronesefläche. — Einem komplexen Kegelschnitt der affinen Ebene  $E$  entspricht in  $E_{12}$  eine konforme (2,2)-Verwandtschaft, insonderheit eine Möbiussche Kreisverwandtschaft, dagegen in  $S$  eine Cremonasche Strahlkongruenz. Schließlich werden noch die Segreschen Hyperkegelschnitte vom affinen Standpunkt aus untersucht, klassifiziert und in  $E_{12}$  konstruktiv behandelt. In  $R$  entsprechen ihnen spezielle Hyperflächen zweiter Ordnung; deren Polarität liefert eine neue Art von Polarität an einem Hyperkegelschnitt. In  $S$  ergeben sich zirkuläre quadratische Strahlkomplexe, deren Komplexkegel von den zu  $E_1$  und  $E_2$  parallelen Ebenen nach Kreisen geschnitten werden, i. a. Hirsche Strahlkomplexe [vgl. dazu Ref., S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. Kl., IIa 145, 657—680 (1936) und 147, 37—47 (1938); dies. Zbl. 17, 29; 19, 322]. Den automorphen Affinitäten des Hyperkegelschnittes entsprechen hierbei automorphe quadratische Strahltransformationen des Bildkomplexes, insbesondere Kollineationen, die sich als nichteuklidische Schraubungen mit festen Achsen deuten lassen. K. Strubecker (Karlsruhe).

**Arvesen, Ole Peder:** Quelques applications de l'addition géométrique des courbes et des surfaces algébriques. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 35, 163—166 (1950).

Verf. hat eine geometrische Addition der Kurven in der Ebene betrachtet [Norske Vid. Selsk. Forhdl. 12, 115—118 (1940); dies. Zbl. 26, 147]; hier findet man eine räumliche Anwendung derselben Methode. Als Beispiele: die Gleichung eines Torus; die Gleichungen der zwei Paraboloiden und anderer algebraischen Flächen aus denjenigen von zwei in verschiedenen Ebenen liegenden Parabeln. Togliatti.

**Arvesen, Ole Peder:** Sur certaines surfaces algébriques, parmi lesquelles la surface de Steiner constitue le cas le plus simple. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 42, 198—201 (1950).

Die hier betrachteten Flächen sind die Enveloppen der Klasse  $n - 1$ , die man erhält, wenn man die erste Polare der unendlichfernen Ebene in bezug auf eine in  $n$  Bündel zerfallende Enveloppe  $n$ -ter Klasse konstruiert. Für  $n = 4$

findet man die Steinersche Fläche, was in der dualen Form aus den elementaren Eigenschaften der Polarentheorie evident ist. *E. G. Togliatti (Genova).*

**Bagchi, Haridas:** On the invariant relation between two cognate sextactic conics of a cubic. Proc. Indian Acad. Sci. A **31**, 16—20 (1950).

Verf. zeigt, daß die drei sechstaktischen Kegelschnitte einer kubischen Kurve, von denen jeder eine der drei von einem der Wendepunkte ausgehenden Tangenten berührt, ein gemeinsames Polardreieck haben mit dem Wendepunkte als einer Ecke und der harmonischen Polaren als gegenüberliegender Seite. — Er fragt nach der Invariante, die ausdrückt, daß zwei Kegelschnitte derartige sechstaktische Kegelschnitte für denselben Wendepunkt einer kubischen Kurve sind, und erhält eine notwendige Bedingung in der Form einer Determinante. Verf. stellt fest, daß die Frage, ob diese Determinante auch die hinreichende Bedingung darstellt, offen bleibt. Die Bedingung ist aber offensichtlich nicht hinreichend, da das Resultat nicht symmetrisch und nicht irreduzibel ist: Entwicklung nach der letzten Spalte gibt z. B. unmittelbar die Abtrennung des Quadrates der Diskriminante einer der beiden Kegelschnitte.

*E. M. Bruins (Amsterdam).*

**Scott, C.:** A geometrical note on the binary cubic form. Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. **8**, 87—88 (1948).

Die drei Schnittpunkte einer Ebene  $p$  mit einer Raumkurve 3. Ordnung  $C_3$  kann man als Nullpunkte einer binären kubischen Form  $f$  auffassen. Die 3 Nullpunkte der kubischen Kovariante  $g$  von  $f$  liegen in einer Ebene  $q$ . Im Nullsystem der  $C_3$  sind den Ebenen  $p$  und  $q$  die Punkte  $P$  und  $Q$  zugeordnet. — Die erste Polare eines Punktes  $Y$  auf  $C_3$  bez.  $f$  hat zwei Nullpunkte, deren Verbindungslinie  $\pi$  eine Schne von  $C_3$  ist. Gleitet  $Y$  längs der  $C_3$ , so beschreibt  $\pi$  die eine Erzeugendenschaar einer Fläche 2. Ordnung  $S$ . — Verf. beweist geometrisch, daß  $P$  der Pol von  $q$  ebenso  $Q$  der Pol von  $p$  bez.  $S$  ist. Projiziert man die  $C_3$  aus  $P$  auf eine Ebene, so geht die  $C_3$  über in eine ebene rationale Kurve 3. Ordnung  $K_3$ , und der bewiesene Satz besagt dann: die Wendepunktlinie von  $K_3$  ist die Polare des Doppelpunktes bezüglich des Kegelschnittes, der  $K_3$  in drei Punkten berührt.

*Weitzenböck.*

● **Kavafian, K. K.:** Étude élémentaire de la quadrice et quelques applications des coordonnées bipolaires. (Actual. sci. industr. No. 1069.) Paris: Hermann & Cie 1949. 59 p.

Die ebene Kurve, die hier mit dem Namen „Quadrice“ bezeichnet wird, ist der Ort der Punkte einer Ebene, deren Entfernungen von zwei festen gegebenen Punkten  $A, B$ , den Brennpunkten, durch eine bilineare Gleichung miteinander verbunden sind; darunter finden sich die Ellipse, die Hyperbel, die Cassinische Kurve, die Lemniskate, die Cartesischen Ovalen usw. Ganz allgemein werden sie hier geometrisch folgendermaßen definiert: von den Brennpunkten  $A, B$  läßt man zwei Geraden  $D, D'$  ausgehen: ist dann  $S$  ein weiter gegebener Punkt, der Pol, und sind  $U, V$  die Schnittpunkte von  $D, D'$  mit einer von  $S$  ausgehenden veränderlichen Geraden, so ist die gesuchte Kurve der Ort der Punkte, deren Entfernungen von  $A, B$  (bipolare Koordinaten) die Werte  $AU, BV$  haben. — Von dieser geometrischen Definition ausgehend, entwickelt Verf. in den ersten zwei Kapiteln eine elementare rein synthetische Theorie der Kurve (Beschreibung der Kurve: ihre Scheitel und Doppelpunkte; Schnittpunkte mit einer Geraden; Ordnung; Schnittpunkte mit einem Kreise; Eigenschaften der Tangenten, Normalen und Schmiegunskreise usw.); wo es nötig ist, verwendet Verf. geometrische infinitesimale Betrachtungen. — Im 3. Kap. findet man eine allgemeine Behandlung der Kurventheorie in bipolaren Koordinaten, mit Anwendungen (orthogonale Trajektorien von  $\infty^1$  Kurven und Beispiele, Bogenelement und Flächenelement usw.). — Im letzten Kap. etwas über die  $\infty^3$  konfokalen „Quadrices“: insbesondere über ihre Büschel und über die Enveloppen ihrer  $\infty^1$  Systeme. — Schließlich drei komplementäre Noten: die letzte betrifft die Kurven 2. Ordnung in bipolaren Koordinaten. *E. G. Togliatti (Genova).*



**Speiser, Andreas:** Il gruppo metrico dei colori. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 231—236 (1949).

In der vorliegenden Arbeit wird der Farbenraum untersucht. Sind  $A$  und  $B$  zwei hinreichend benachbarte Farben, so gibt es stets eine Farbe  $C$ , die mit  $A$  vermischt,  $B$  ergibt. Hieraus folgt, daß jede Farbe als Zentrum einer Involution aufgefaßt werden kann. Die Folgerungen hieraus werden zunächst in einer Farbebene gezogen. Nach G. Thomsen [Grundlagen der Elementargeometrie, 1937, S. 27; A. Speiser, Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937, S. 27; dies. Zbl. 17, 153] besitzt diese Ebene eine Euklidische Metrik, wenn das Produkt dreier Involutionen wieder eine solche ist. Verf. zeigt, daß die Farben diesem Gesetz genügen. Um aus der Farbebene  $z = 0$  den ganzen Farbenraum zu erhalten, nimmt man Hell und Dunkel hinzu. Die Metrik in den Ebenen  $z = \text{const.}$  ist von komplizierterer Natur, es wird vermutet, daß sie nichteuklidisch ist, und ein Ansatz gegeben, sie aus ihrem infinitesimalen Verhalten zu bestimmen. *J. J. Burckhardt.*

### Algebraische Geometrie:

● **Piazolla-Beloch, Margherita:** Teoria diametrale delle curve algebriche piane.

**Piazolla-Beloch, Margherita:** Applicazione: Curve algebriche piane d'ordine  $2n$ , con due punti multipli all'infinito di molteplicità  $n$  (coniche generalizzate). Ferrara: Istituto di Matematica dell'Università di Ferrara 1949. 81, 11 p.

L'A. généralise les plus importantes propriétés diamétrales des coniques à des courbes algebriques de degré quelconque. — Newton a appelé diamètre conjugué d'une direction  $D$  par rapport à une courbe algébrique  $C$  d'ordre  $n$ , la droite lieu des centres des moyennes distances des intersections de  $C$  et d'une parallèle à  $D$ . Si l'équation de  $C$  est:  $f(x, y) = U_n(x, y) + U_{n-1}(x, y) + \dots + U_0 = 0$  la droite conjuguée de  $1.m$  est  $x \left( \frac{\partial U_n}{\partial x} \right)_{1,m} + \left( \frac{\partial U_n}{\partial y} \right)_{1,m} + U_{n-1}(1, m) = 0$ . Si tous les diamètres passent par un même point celui-ci est dit point principal. Il existe un tel point  $x_0, y_0$  à distance finie si  $U_{n-1}(x, y) = x_0 \frac{\partial U_n(x, y)}{\partial x} + y_0 \frac{\partial U_n(x, y)}{\partial y}$ , il est à l'infini si  $U_n(x, y) = (px + qy)^n$ ; il y a une droite de points principaux si  $U_n(x, y) = (px + qy)^n$ ,  $U_{n-1} = (px + qy)^{n-1}K$ , et réciproquement. — Un diamètre perpendiculaire à sa direction conjuguée est dit principal, en général il y en a  $n$ ; pour qu'il y en ait une infinité il faut et suffit que la courbe ait avec la droite de l'infini  $n/2$  intersections en chacun des points cycliques, ce qui exclut les courbes d'ordre impair; en particulier les courbes ayant les deux points cycliques d'ordre  $n/2$  possèdent à la fois un point principal et une infinité de diamètres principaux. Les asymptotes simples apparaissent comme les diamètres coïncidents avec la direction conjuguée: si au contraire une direction asymptotique  $D$  est multiple d'ordre  $r$ , le diamètre conjugué de cette direction est parallèle à celle-ci et est le lieu des centres des moyennes distances de l'intersection d'une transversale avec les  $r$  asymptotes parallèles à  $D$ . — En général la conjugaison ainsi définie n'est pas involutive: il y a seulement  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  couples involutifs. Si tous le sont, la courbe est sûrement de degré pair et  $U_n = (ax^2 + bxy - cy^2)^{n/2}$ . — On peut généraliser la notion de diamètre, en considérant le lieu des points tels que

$$\sum MA_1 \cdot MA_2 \cdot MA_3 \cdot MA_4 \cdots MA_k = 0$$

les  $A_i$  étant les intersections de  $C$  par les parallèles à la direction  $D$ . Ce lieu est une courbe d'ordre  $k$ , diamètre curviligne des  $D$ . Les équations sont de la forme:

$$\left\{ \left( \frac{\partial U_n}{\partial x} \right)_{1,m} x + \left( \frac{\partial U_n}{\partial y} \right)_{1,m} y \right\}^{(k)} + k \left\{ \left( \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x} \right)_{1,m} x + \left( \frac{\partial U_{n-1}}{\partial y} \right)_{1,m} y \right\}^{(k-1)} + \dots + k(k-1) \dots (k-p) \left\{ \frac{\partial U_{n-p}}{\partial x} x + \frac{\partial U_{n-p}}{\partial y} y \right\}^{(n-p)} + \dots = 0$$

les puissances symboliques se développant comme dans la formule de Taylor; l'introduction de ces courbes diamétrales permet de considérer les directions auto-conjuguées où la courbe  $C_k$  se décompose en les  $k$  asymptotes correspondant à un point  $k$ -ple à l'infini. — S'il existe un point principal et un centre de symétrie, ils coïncident, d'où une méthode pour trouver ce centre; les axes de symétrie doivent être diamètres principaux donc au plus  $n$ , si  $n$  est pair; si  $n$  impair ils doivent passer par un point à l'infini donc encore  $n$  au plus. Une méthode plus simple de recherche est donnée par la remarque si  $ax + by + c = 0$  est axe de symétrie pour  $f_n = 0$  on doit avoir:  $a \partial f_n / \partial x + b \partial f_n / \partial y = (ax + by + c) f_{n-2}$  et ainsi de suite les quotients successifs  $f_{n-2h}$  étant tels que les expressions  $a \partial f_{n-2h} / \partial x + b \partial f_{n-2h} / \partial y$  soient divisibles par  $ax + by + c$ ; d'où les méthodes pratiques de recherche des axes. — L'A. donne une application aux coniques généralisées courbes d'ordre  $2n$ , ayant deux points d'ordre  $2n$  à l'infini, la nature de ces points fait donner les noms de types parabolique, elliptique et hyperbolique. Dans le cas P. tous les diamètres sont parallèles. Dans les cas E. et H.; les diamètres sont 2 à 2 conjugués formant une involution dont les rayons doubles sont les asymptotes. Il y a toujours un point principal, à l'infini dans le cas P. Dans les cas E. et H. il y a deux directions principales rectangulaires se coupant au point principal, au cas P. une seule direction principale. Si les rayons doubles sont isotropes infinité de rayons doubles rectangulaires.

B. d'Orgeval (Grenoble).

Enriques, F.: Sur la démonstration géométrique d'un théorème de Picard, concernant les surfaces algébriques. Rev. Acad. Ci. exact. fis. natur. Madrid 43, 75—77 (1949).

Es sei  $F$  eine reguläre algebraische Fläche mit dem numerischen Geschlecht  $p_a$  und dem geometrischen Geschlecht  $p_g > p_a$ . Auf  $F$  definiert jede irreduzible Schar  $|C|$  vom Geschlecht  $\pi$  eine adjungierte Schar  $|C'|$  der Dimension  $r \geq p_a + \pi - 1$ . Dieses Ergebnis ergibt sich aus der von Enriques [Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche, Mem. Soc. Ital. Sci., III. S. 10, 1—81 (1896)] gegebenen Definition des numerischen Geschlechtes. Picard [J. reine angew. Math. 129, 275—286 (1905)] verschärfte dieses Resultat, indem er bewies, daß  $|C'|$  regulär ist, d. h. daß man genau  $r = p_a + \pi - 1$  hat; er bewies den Satz auf transzendenter Wege. 1908 hatte Severi eine geometrische Beweisanordnung vorgeschlagen [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., V. S. 17, 465—470 (1908)] und zwar eines allgemeineren Satzes: Die zu einer irreduziblen Kurve  $C$  ohne mehrfache Punkte adjungierte Schar  $|C'|$  wäre immer regulär, wenn  $C$  in einer stetigen Schar variieren kann, die kein Büschel ist. Dabei stützte er sich auf einen Hilfssatz, der sich nun, wie Verf. zeigt, als falsch erweist. Verf. beweist nämlich: Wenn  $C$  eine irreduzible algebraische Kurve ohne mehrfache Punkte ist auf einer irregulären Fläche  $F$ , so kann man eine genügend ausgedehnte irreduzible lineare Schar  $|D|$  konstruieren, die  $|C|$  enthält und derart ist, daß die Restschar  $|D - C|$  auf  $C$  eine Schar ausschneidet, die keine Vollschar ist. — Der Fehler in den Betrachtungen Severis wird vom Verf. nachgewiesen. Demzufolge ist der algebraisch-geometrische Beweis des Picardschen Satzes eine offene Frage.

J. C. H. Gerretsen (Groningen).

Manara, Carlo Felice: Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 103—108 (1950).

Eine Transformation sei in der Umgebung eines Punktpaares  $O$  und  $O'$  durch regulär-analytische, eindeutig umkehrbare Funktionen gegeben.  $O$  und  $O'$  seien jeweils die Koordinatenanfangspunkte. Dann gibt Verf. ein Produkt von Cremona-Transformationen (genauer: de-Jonquières-Transformationen) an, deren Potenzreihenentwicklungen in der Umgebung von  $O$  und  $O'$  in den Gliedern bis zu einem

beliebigen vorgegebenen Grad mit denen der gegebenen Transformation übereinstimmen. Verf. führt seinen Beweis zunächst für die Ebene durch, und zwar durch Zwischenschaltung von Transformationen  $x' = x + x^r y^s$ ,  $y' = y$ . Für höhere Dimensionen folgt dann der Satz durch Induktion. *Ott-Heinrich Keller* (Dresden).

**Zappa Casadio, Giuseppina:** Determinazione delle trasformazioni cremoniane fra due spazi, aventi infinite direzioni inflessionali incidenti ad una curva data. *Giorn. Mat. Battaglini* **79**, 63—65 (1949).

Es sei  $T$  eine Cremonasche Verwandtschaft zwischen zwei Räumen  $S$ ,  $S$  und es sei  $P$ ,  $\bar{P}$  ein Paar entsprechender Punkte. In allgemeinen gibt es sieben durch  $P$  hindurchgehende Hauptgeraden  $r_i$ , so daß jede durch  $P$  hindurchgehende Kurve, die eine der Geraden  $r_i$  als Inflexionstangente hat, in eine Kurve verwandelt wird, die in  $P$  einen Inflexionspunkt aufweist: die betreffenden Tangenten in  $\bar{P}$  sind die sieben Hauptgeraden von  $T$  in  $\bar{P}$ . Hier betrachtet Verf. den Fall, wo die Hauptgeraden von  $T$  in  $P$  unendlich sind, und einen Kegel bilden, den eine feste Kurve  $\varphi$  von  $P$  aus projiziert. In diesem Falle beweist Verf. zunächst, daß  $\varphi$  eine algebraische Kurve sein muß, einer Ordnung  $p \leq 2$ . Ist  $p = 2$ , so ist  $T$  eine quadratische Verwandtschaft (2, 2). Ist dagegen  $p = 1$ , so bestehen die zwei homaloidischen Flächensysteme, die  $T$  definieren, aus Regelflächen der Ordnungen  $m$  und  $2m-1-h$ ; die ersten besitzen eine feste  $(m-1)$ -fache Gerade,  $h$  gemeinsame Erzeugende ( $0 \leq h \leq E^{3m-3}_2$ ) und  $3m-3-2h$  gemeinsame Punkte; die anderen besitzen eine feste  $(2m-2-h)$ -fache Gerade,  $3m-3-2h$  gemeinsame Erzeugende und  $h$  gemeinsame Punkte.  
*E. G. Togliatti* (Genova).

**Fano, Gino:** Le trasformazioni di contatto birazionali del piano. *Comment. math. Helvetici* **20**, 181—215 (1947).

Die vorliegende Arbeit ist nach Kenntnis des Ref. die erste größere, die sich im Geiste der algebraischen Geometrie vom projektiven Standpunkt aus mit den ebenen Berührungstransformationen beschäftigt, während fast alle bisherigen Bearbeiter dieses Gebietes im Anschluß an den Begründer Lie selber sich nur kartesischer Koordinaten bedienten und meist die Linien-elemente durch die 3 Koordinaten  $(x, y, p)$  festlegten oder eine der schon von Lie herrührenden Abbildungen der Linien-elemente auf ein dreidimensionales Kontinuum benutzt haben. Diese Abbildungen sind jedoch in der vollen projektiven Ebene nicht ausnahmslos eindeutig; eine diese Forderung erfüllende Abbildung, die nach einer Bemerkung von Engel auch auf Lie zurückgeht, erhält man erst, wenn man die Gesamtheiten Punkt  $(x_0, x_1, x_2)$  und Gerade  $(u_0, u_1, u_2)$  der projektiven Ebene  $P_2$  auf die Punkte einer Segreschen Mannigfaltigkeit  $S_{2,2}$  des  $P_8$  und darin die Paare „Punkt-Gerade in vereinigter Lage des  $P_2$ “ (Bedingung  $u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$ ) auf die Punkte eines gewissen allgemeinen hyperebenen Schnittes  $M_3$  der  $S_{2,2}$  abbildet. Diese Abbildung der Linien-elemente des  $P_2$  auf die Punkte des beschriebenen  $M_3$  des  $P_7$ , aus der die Lieschen Abbildungen leicht durch Projektion folgen, steht nun im Mittelpunkt der Betrachtungen des Verf. Zunächst werden einige Eigenschaften der  $M_3$  beschrieben, als wichtigste die Existenz von 2 Scharen von je  $\infty^2$  Geraden  $R, R'$  darauf, entsprechend den 2  $\infty^2$  Scharen von Linien-elementen je mit festem Punkt oder fester Gerade. Ferner ergibt sich, daß die sog. Elementvereine, d. h. Systeme von  $\infty^1$  Linien-elementen mit vereinigter Lage aufeinanderfolgender Elemente auf solche Kurven im  $M_3$  abgebildet werden, deren Tangenten in jedem Punkt  $P_0$  der von den beiden erzeugenden Geraden durch  $P_0$  aufgespannten sog. Prinzipalebenen angehört. Diese ausgezeichneten Kurven auf  $M_3$  heißen „Prinzipalkurven“. Bei einer algebraischen Berührungstransformation wird nun den  $\infty^2$  Linien-elementen je mit festem Trägerpunkt (oder mit fester Trägergerade) ein gewisses System von  $\infty^2$  anderen Elementvereinen, d. h. algebraischen Kurven, als Träger ihrer Berührungselemente aufgefaßt, zugeordnet, das folgende Bedingungen erfüllt: 1. Es gibt im allgemeinen unter den  $\infty^2$  Kurven eine bestimmte, die eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berührt, 2. die charakteristische Schar auf jeder Kurve des Systems ist eine  $g^1$ . Solche Systeme, unter denen die gewöhnlichen homaloiden Netze und die dazu dualen Gebilde enthalten sind, heißen allgemein „homaloid“. Haben die Kurven eines derartigen Systems die Ordnung  $n$  und Klasse  $r$ , so entspricht ihm auf  $M_3$  eine sog. Kongruenz  $\Omega$  von Prinzipalkurven der Ordnung  $n = r$ . Derartige Kongruenzen  $\Omega$  werden nun gründlich studiert. Es ergibt sich, daß  $\Omega$ , außer wenn es eine der beiden Geradenkongruenzen auf  $M_3$  ist, stets Leitkurven besitzt, d. h. Kurven, die von allen Kongruenzkurven getroffen werden. Die Kurven, einer Kongruenz  $\Omega$  können auf die Punkte einer Ebene  $P_2$  birational abgebildet werden, so daß einem homaloiden System in diesem  $P_2$  ein System von  $\infty^2$  zu  $\Omega$  gehörigen rationalen



Flächen zugeordnet werden kann. Wenn die  $\infty^1$  erzeugenden Kurven irgendeiner derartigen Systemfläche dadurch definiert sind, daß man nach allen  $\Omega$ -Kurven fragt, die eine Kurve  $k$  in  $M_3$  treffen, so bilden diese  $\infty^3$  Kurven  $k'$  eine zu  $\Omega$  konjugierte Kongruenz  $\Omega'$ , und die Beziehung zwischen  $\Omega$  und  $\Omega'$  ist wechselseitig und von derselben Art wie zwischen den beiden Geraden-scharen  $R$  und  $R'$ . Eine Berührungstransformation kann nun dadurch definiert werden, daß man die Kurven einer solchen Kongruenz  $\Omega$  auf die Geraden des Systems  $R$  birational bezieht und die eines zu  $\Omega'$  konjugierten Systems auf die von  $R'$ . Ersichtlich erhält man in der Ebene birationale Berührungstransformationen, wenn man beliebige Cremonatransformationen des Punkt- und Geradenkontinuums hintereinander ausführt. An einer bestimmten Eigenschaft der entsprechenden  $\Omega$ -Kongruenzen wird dann gezeigt, daß derartig erzeugte Berührungstransformationen sicherlich nicht die allgemeinsten sein können. Vieles Weitere über die gegenseitige Beziehung der Kongruenzen  $\Omega$  und  $\Omega'$  findet sich in der Arbeit noch. Es ergibt sich z. B., daß die Leitlinien von  $\Omega$  sich entweder unter den Kurven von  $\Omega'$  befinden oder, wenn sie auch zu  $\Omega$  gehören, Basiskurven des  $\Omega'$  definierenden homaloiden Netzes sind. Die erste Möglichkeit kann auch wechselseitig stattfinden; dann lassen sich die Kurven von  $\Omega$  und die von  $\Omega'$  einem  $\infty^3$ -System entnehmen. Ein derartiges  $\infty^3$ -System hat man z. B. in der Gesamtheit der  $\infty^3$  rationalen Kurven 4. Grades  $C^4$  auf  $M_3$ , die durch einen Punkt  $P_0$  gehen und die Gesamtheit der Kegelschnitte als Elementvereine, die ein festes Element gemein haben, darstellen. Bei bestimmter Projektion kann man diese  $\infty^3 C^4$  in die Geraden eines linearen Komplexes des  $P_3$  überführen derart, daß die Kongruenzen  $\Omega$ ,  $\Omega'$  in spezielle Kongruenzen innerhalb dieses Komplexes übergehen. In diesem Fall sind die Kongruenzen  $\Omega$  auf die Punkte eines quadratischen Kegels abbildbar, haben also als rationale Gebilde die invariante Ordnung 2. Es ist dann nur noch der andere Fall möglich, daß sie die invariante Ordnung 1 haben, d. h. ihre Kurven ausnahmslos eindeutig auf die Punkte einer Ebene abbildbar sind. Es sei noch erwähnt, daß  $\Omega$  durch  $\Omega'$  nicht bestimmt ist, sondern daß man im allgemeinen  $\infty$  viele Systeme  $\Omega'$  zu einem gegebenen  $\Omega$  finden kann; beispielsweise können zu dem Geradensystem  $R$   $\infty$  viele Kongruenzen von Kurven höheren Grades konjugiert sein.

Bureau (Hamburg).

**Keller, Ott-Heinrich:** Zur Theorie der ebenen, algebraischen Berührungstransformationen. II. Math. Ann., Berlin 121, 467—495 (1950).

Verf. betrachtet Berührungstransformationen der Ebene und beschäftigt sich diesmal mit der Frage, welche Determinantenbildung an Stelle der Jacobideterminante bei Punkttransformationen als Anzeiger für eine Singularität zu treten hat. Nach einigen Vorbemerkungen und Wiederholungen aus der algebraischen Geometrie in § 1 und 2 werden in § 3 einige Möglichkeiten dafür besprochen und verworfen. Darunter fallen die Determinante  $\frac{\partial(X, Y, P)}{\partial(x, y, p)}$ , wenn  $X = X(x, y, p)$  usw. die Berührungstransformation festlegen, und ähnliche Bildungen. In § 4 wird dann die richtige Bildung

$$\Delta(F) = \begin{vmatrix} F_{X_1 x_1} & F_{X_1 x_2} & F_{X_1 x_3} \\ F_{X_2 x_1} & F_{X_2 x_2} & F_{X_2 x_3} \\ F_{X_3 x_1} & F_{X_3 x_2} & F_{X_3 x_3} \end{vmatrix}$$

eingeführt. Dabei ist  $F(X; x) = 0$  die definierende Gleichung, aus der man nach Lie diejenigen Berührungstransformationen, die keine reinen Punkttransformationen sind, erhält; setzt man die  $x_i$  konstant, so definiert  $F = 0$  die diesem Punkt zugeordnete Kurve der anderen Ebene und umgekehrt. Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, wie man mit dieser Determinante  $\Delta$  bei der Zusammensetzung zweier durch  $F$  und  $G$  definierter Berührungstransformationen rechnet. Ist die dabei resultierende Transformation  $K$  eine reine Punkttransformation, so ergibt sich deren Jacobische Determinante in der Gestalt  $\Delta(G)/\Delta(F)$ ; im allgemeineren Fall ergibt sich  $\Delta(K)$  im wesentlichen als Produkt  $\Delta(G)\Delta(F)$  dividiert durch  $H_X(F - G)$ , wobei  $H_X$  die bez.  $X$  gebildete Hessesche Determinante ist. Der nächste Teil der Arbeit ist dann der Frage gewidmet, was  $\Delta = 0$  bedeutet. Zunächst ist bei  $\Delta \equiv 0$  die Transformation durchweg ausgeartet. Sonst ist an einer Stelle ( $X: x$ ), wo  $\Delta = 0$ , eine der beiden Kurven  $f(X; x) = 0$  oder  $f(X; \bar{x}) = 0$  singular, oder die Transformation verzweigt sich dort oder sie ist unendlich vieldeutig. Diese Fälle werden im einzelnen näher betrachtet, wobei es auf die Untersuchung des Schnitts von  $f = 0$  und  $\Delta = 0$  im kleinen ankommt. Im letzten Abschnitt der Arbeit werden diese Fragen im großen betrachtet und dabei wird ein Bézoutsatz für doppelt projektive Räume in einer

etwas eigenartigen Bezeichnungsweise der dabei in Frage kommenden Räume hergeleitet. Die Benutzung der Produktmannigfaltigkeit zweier Ebenen, bzw. Veronesescher Flächen, worum es sich im wesentlichen handelt, dürfte nach Ansicht des Ref. diese Dinge etwas durchsichtiger gestalten. *Bureau (Hamburg).*

### Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

• **Gol'dfajn, I. A.:** Elemente der Vektorrechnung. 2. Aufl. Moskau-Leningrad: OGIZ, Staatsverlag f. techn.-theoret. Literatur 1948. 176 S. R. 4,50 [Russisch].

Das Buch enthält in 175 Seiten eine Einführung in die Vektorrechnung und ist ersichtlich mehr für Studenten physikalisch-technischer Richtung als für reine Mathematiker bestimmt. Die Art der Darstellung und der Stoffumfang entspricht ungefähr den deutschen Lehrbüchern von Valentiner und Ignatowski. Die ersten beiden Kapitel bringen die Einführung des Vektorbegriffs und das Wesentliche aus der Vektoralgebra, Kap. 3 die Differentiationsregeln von Vektorfunktionen mit den bekannten Anwendungen auf die Raumkurven, Kap. 4 enthält eine Theorie der Vektorfelder mit der Einführung von grad, div und rot mit den zugehörigen Sätzen; im letzten Kapitel wird schließlich etwas Potentialtheorie gebracht mit den Greenschen Formeln und der Lösung des Randwertproblems für die Kugel. Nebenbei sei erwähnt, daß die in Frankreich meist nach Ostrogradski, in Deutschland nach Gauß benannte Integralformel hier paritätisch nach Gauss-Ostrogradski benannt ist. *Bureau (Hamburg).*

**Brand, Louis:** The vector potential of a solenoidal vector. Amer. math. Monthly 57, 161—167 (1950).

Durch  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbf{r})$  sei im räumlichen Gebiet  $R$  ein Vektorfeld mit  $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$  gegeben ( $\mathbf{r}$  = Ortsvektor bezüglich  $O$ ). Unter gewissen Voraussetzungen kann nach H. Liebmann [Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 60, 176—189 (1908)] ein zugehöriges Vektorpotential  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathbf{r})$  durch

$$(1) \quad \mathfrak{P} = -\mathbf{r} \times \int_0^1 \mathfrak{B}(\lambda \mathbf{r}) \lambda d\lambda$$

gefunden werden, falls das Integral konvergiert und  $\mathbf{r} \times \mathfrak{B} \neq 0$  ist. Zur Herleitung wird in eine in  $R$  gelegene geschlossene Kurve  $C$  eine Fläche  $S$  eingespannt und das über  $S$  erstreckte Flächenintegral  $\int \mathfrak{B} df = \int \operatorname{rot} \mathfrak{P} df$  nach Stokes als Linienintegral  $\int \mathfrak{P} dx$  über  $C$  dargestellt. Das Flächenintegral  $\int \mathfrak{B} df$  über die Kegelfläche  $K$ , welche  $C$  von  $O$  aus projiziert, läßt sich ebenfalls als Linienintegral über  $C$  schreiben. Nach dem Gaußschen Integralsatz verschwindet die Summe beider Integrale, woraus sich (1) ergibt. Auf diese Herleitung folgt hier eine kurze vektoranalytische Bestätigung für  $\operatorname{rot} \mathfrak{P} = \mathfrak{B}$  unter der Voraussetzung, daß  $\nabla \mathfrak{B}(\lambda \mathbf{r})$  und  $d\mathfrak{B}(\lambda \mathbf{r})/d\lambda$  in  $(R, 0 < \lambda \leq 1)$  stetig sind. (Dabei, wie auch bei der Herleitung, kann wohl die weitere Voraussetzung, daß  $R$  mit jedem Punkt  $P$  wenigstens auch die bei  $O$  offene Strecke  $OP$  enthält, nicht entbehrt werden.) Indem er die Kegelfläche  $K$  durch ihre Verlängerung über  $C$  hinaus ersetzt, zeigt Verf., daß man statt (1) auch

$$(2) \quad \mathfrak{P} = \mathbf{r} \times \int_1^\infty \mathfrak{B}(\lambda \mathbf{r}) \lambda d\lambda$$

verwenden kann. Für den Fall, daß auch diese Darstellung des Vektorpotentials versagt, ersetzt er den Kegel durch eine Zylinderfläche, parallel zu einem Einheitsvektor  $\mathbf{e}$ , und gelangt so zu

$$(3) \quad \mathfrak{P} = \mathbf{e} \times \int_0^\infty \mathfrak{B}(\mathbf{r} + \lambda \mathbf{e}) d\lambda.$$

(Auch bei diesen beiden Formeln hält Ref. eine entsprechende Voraussetzung über  $R$  und  $O$  bzw.  $\mathbf{e}$  für angebracht.) — In dem Sonderfall eines homogenen  $\mathfrak{B}(\mathbf{r})$ , also  $\mathfrak{B}(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^n \mathfrak{B}(\mathbf{r})$ , gehen für  $n \neq -2$  die Darstellungen (1) und (2) in

$$(4) \quad \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r}}{n+2}$$

über. Im Fall  $n = -2$  wäre auf (3) zurückzugreifen. (Nebenbei bemerkt tritt dieser Fall auch ein, wenn  $r \times \mathfrak{B} = 0$  ist). Auch (3) und (4) werden direkt bestätigt. Drei Beispiele. *Schönhardt* (Stuttgart).

**Craig, Homer V. and William T. Guy jr.:** Jacobian extensors. *Amer. J. Math.* **72**, 229—246 (1950).

The authors define Jacobian extensors belonging to a curve. The transformation of these quantities contains in addition to the coefficients  $A_{\alpha}^{\alpha'} = \partial_{\alpha} x^{\alpha'}$  and their derivatives certain coefficients depending on the weighted Jacobian  $\Delta = \text{Det}(A_{\alpha}^{\alpha'})$  and its derivatives to the parameter of the curve. The properties of Jacobian extensors, which include the ordinary tensor densities as special cases, are similar to those of ordinary extensors. It is shown that an ordinary symmetric connection defines a Jacobian connection. It appears that certain intrinsic derivatives of weighted tensors can be expressed as contractions of certain extensors. *J. Haantjes*.

**Biran, Lufti:** Mouvement à un paramètre. *Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A* **12**, 208—229 (1947).

Es handelt sich um eine Anwendung der dualen Vektorrechnung auf die Untersuchung einparametrischer Bewegungen. Die Lage eines starren Körpers wird beschrieben durch die Lage von drei aufeinander senkrechten Geraden, die mit dem Körper starr verbunden sind, d. h. also durch drei duale orthogonale Einheitsvektoren  $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$ , die von einem Parameter  $t$  abhängen. Es gilt die Darstellung (1)  $d\vec{X}_i/dt = \vec{I} \times \vec{X}_i$ . Der duale Vektor  $\vec{I}$  bestimmt die Momentanbewegung zur Zeit  $t$ . Es wird das Ergebnis von Darboux für Drehungen um einen festen Punkt auf allgemeine Bewegungen verallgemeinert. Die Integration von (1) läßt sich auf die Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung zurückführen. Ferner werden zusammengesetzte Bewegungen untersucht und das räumliche Analogon der Euler-Savaryschen Formel abgeleitet. Die Arbeit schließt mit Anwendungen auf die Differentialgeometrie der Kurven und Regelflächen. *Rinow* (Greifswald).

**Bottema, O.:** Das Viereck von Bennett. *Actual. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1949, 008, 2 p.* (1949) [Holländisch].

**Tietze, Heinrich:** Über stabile und indifferente Ruhelagen eines homogenen Zylinders. *S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* **1948**, 299—301 (1949).

Besprechung einiger geometrischer Hilfssätze einer früheren Arbeit des Verf. [*S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* **1945, 1946**, 131—158 (1946)].

*Dinghas* (Berlin).

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

**Sen Gupta, B. K.:** Note on the closest contact of a conic. *Math. Student, Madras* **17**, 38—40 (1950).

Analytische Herleitung einiger einfacher Sätze über die Schmiegekegelschnitte ebener Kurven in Punkten, in denen der Krümmungskreis vierpunktig berührt.

*Gericke* (Freiburg i. Br.).

**Rutishauser, Heinz et Hans Samelson:** Sur le rayon d'une sphère dont la surface contient une courbe fermée. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 755—757 (1948).

Vom erstgenannten Verf. stammt der Satz: Es bedeute  $\mathfrak{S}_n$  die Einheitskugel des  $(n+1)$ -dimensionalen euklidischen Raumes und  $C$  eine geschlossene Kurve auf  $\mathfrak{S}_n$  mit der Länge  $L < 2\pi$ . Dann gibt es einen Punkt von  $\mathfrak{S}_n$ , dessen Entfernung von  $C$   $\leq L/4$  ausfällt. — Der Beweis dieses Satzes, der als eine sinngemäße Verallgemeinerung eines Satzes von Fenchel ( $n=2$ ) betrachtet werden kann, wird hier ohne dessen Benutzung, durch eine einfache Überlegung erbracht, die auf eine Idee des zweitgenannten Verf. zurückgeht. Verallgemeinerung auf geschlossene Kurven nichteuklidischer und allgemeiner Räume.

*Dinghas* (Berlin).



**Wunderlich, Walter:** Über die polykonischen Loxodromen. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 29, 177—186 (1949).

Es werden jene Raumkurven untersucht, die die Erzeugenden zweier Projektionskegel unter konstanten Winkeln schneiden. Schon G. Pirondini [J. reine angew. Math. 115, 61—73 (1897)] hat gezeigt, daß diese Kurven i. a. auf Drehflächen vierter Ordnung liegen und daß sie bei Abwicklung des achsenparallelen Zylinders durch sie in einen gewöhnlichen Zykloidenbogen übergehen. Nach E. Cesàro [Rend. Acad. Sci. fis. mat. Napoli, III. S. 9, 73—89 (1903)] ist der Meridian dieser Drehfläche ein Cartesisches Oval. Cesàro zeigte ferner, daß die Kurve noch für einen dritten Kegel Loxodrome ist und daß sie auf einem vierten Kegel geodätische Linie ist. Wie Verf. zeigt, lassen sich alle diese Tatsachen dem umfassenderen Satz unterordnen, daß eine solche polykonische Loxodrome bei der Abwicklung ihres Verbindungskegels mit einem beliebigen Achsenpunkt in eine zyklische Linie übergeht. Insbesondere entsteht dabei eine Kreisevolute, wenn die Kegelspitze im außerordentlichen Brennpunkt des Cartesischen Ovals angenommen wird. Daraus folgen elementar alle bekannten und viele neue Eigenschaften der polykonischen Loxodromen: z. B. die Tatsache, daß nicht nur die Tangenten und Schmiegeebenen, sondern auch die Normalebenen und Krümmungsachsen eine feste Kugel berühren. Jede polykonische Loxodrome und ihre Planevolute (Polare) sind geodätische Linien auf kongruenten Kegeln und sind sogar durch diese Eigenschaft gekennzeichnet. Die genannte Drehfläche (mit einem Cartesischen Oval als Meridian) ist eine spezielle Zykloide. Auf ihr fallen die  $\infty^2$  polykonischen Loxodromen mit den Darboux'schen Linien zusammen, weil ihre Schmiegkugeln die Fläche berühren. Durch Inversionen mit den drei Flächenbrennpunkten als Zentren gehen die polykonischen Loxodromen in kongruente Kurven über. Die analytische Darstellung der polykonischen Loxodromen führt i. a. auf elliptische Integrale. Als Sonderfälle gehören zu diesen Kurven die sphärischen Bündelloxodromen und die Böschungslinien auf Drehflächen zweiter Ordnung mit lotrechter Achse.

K. Strubecker (Karlsruhe).

**Mishra, R. S.:** Curves whose geodesic torsion is extremum. Proc. Benares math. Soc., n. S. 9, 37—41 (1947).

Ist  $x^i = x^i(u^1, u^2)$  der Ortsvektor einer Fläche des euklidischen  $R_3$ ,  $I = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  ihre erste und  $II = d_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$  ihre zweite Grundform, ist ferner  $X^i$  der Einheitsvektor der Flächennormalen und  $e_{\alpha\beta} = (X^i, x^i_{,\alpha} x^i_{,\beta})$ , also mit dem assoziierten Tensor  $e^{\alpha\beta}$  umgekehrt  $X^i = e^{\alpha\beta} x^i_{,\alpha} x^i_{,\beta}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) und zyklisch, so ergibt sich als geodätische Torsion  $\tau_g$  einer Kurve durch  $x^i$

$$\tau_g = (e^{\delta\gamma} d_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} du^\alpha du^\beta) : (g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta).$$

$\tau_g$  wird extrem für Richtungen  $du^1 : du^2$ , die der Gleichung

$$e^{\varphi\varphi} e^{\delta\gamma} g_{\beta\varphi} (d_{\alpha\beta} g_{\varphi\gamma} + d_{\varphi\delta} g_{\alpha\gamma}) du^\alpha du^\beta = 0$$

genügen. Verf. nennt ihre Integralkurven „geodätische Torsionslinien“ und zeigt, daß sie auf jeder Fläche ein Orthogonalsystem bilden, das die Winkel der Krümmungslinien halbiert und nur für Minimalflächen mit den Asymptotenlinien zusammenfällt. — Verf. studiert ähnlich das Verhältnis der geodätischen Torsion  $\tau_g$  zur Krümmung  $k$  der Flächenkurve

$$\tau_g : k = (e^{\delta\gamma} d_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} du^\alpha du^\beta) : (d_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta),$$

das extrem wird für die Richtungen

$$e^{\varphi\varphi} e^{\delta\gamma} d_{\beta\varphi} (d_{\alpha\delta} g_{\varphi\gamma} + d_{\varphi\delta} g_{\alpha\gamma}) du^\alpha du^\beta = 0,$$

deren Integralkurven L. P. Eisenhart [Diff. geom. of curves and surfaces (1909) S. 131] als charakteristische Kurven bezeichnet hat. Er zeigt, daß auf reellen Flächen die geodätischen Torsionslinien und charakteristische Linien nie identisch sein können.

K. Strubecker (Karlsruhe).

**Vincensini, Paul:** Sur un mode de représentation des surfaces. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1114—1115 (1949).

Jedem Punkt  $M$  einer Fläche  $S$  wird ein Punkt  $P$  auf der Normalen von  $S$  in  $M$  zugeordnet. Die Punkte  $P$  bilden eine Fläche  $\Sigma$ . Jedem Linienelement auf  $S$  durch  $M$  entspricht so ein Linienelement auf  $\Sigma$  durch  $P$ . Durch die Forderung, daß ein Linienelement auf  $S$  orthogonal zu seinem korrespondierenden auf  $\Sigma$  ist, sind in jedem Punkt von  $S$  zwei Richtungen festgelegt, die von den Krümmungslinien auf  $S$  halbiert werden. Das von den zwei Richtungen auf  $S$  tangierte Kurven-

netz charakterisiert die Lage von  $\Sigma$  in bezug auf  $S$  vollständig. Der Punkt  $P$  ist Krümmungsmittelpunkt der in diesen Richtungen genommenen Normalschnitte. Daraus werden weitere Ergebnisse hergeleitet. *W. Haack* (Berlin).

**Blaschke, Wilhelm:** Sulla geometria differenziale delle superficie  $S_2$  nello spazio euclideo  $S_4$ . Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 205—209 (1949).

Eine Fläche  $S_2$   $x(u, v)$  des euklidischen  $S_4$  erzeugt durch ihre  $\infty^2$  Tangentenebenen und deren Ferngeraden eine Linienkongruenz im projektiven Fernraum  $P_3$  des  $S_4$ , dem überdies durch die euklidische Metrik des  $S_4$  eine elliptische Metrik aufgeprägt ist. Bildet man nach Hjelmslev, Fubini und Study die Strahlen dieser Kongruenz auf die Punkte zweier Kugeln ab, so erhält man zwei sphärische Bilder der Fläche  $S_2$  und durch sie nach dem Vorgange von Gauß für die Fläche  $S_2$  des  $S_4$  auch zwei Gegenstücke der Gaußschen Krümmung und zwei Gauß-Bonnetsche Formeln. — Sind  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) vier begleitende orthogonale Einheitsvektoren der Fläche  $S_2$  in  $S_4$ , von denen  $a_1$  und  $a_2$  die Fläche  $S_2$  berühren, und bezeichnen  $\sigma_i$  und  $\tau_{ik}$  Pfaffsche Formen ( $\tau_{ik} + \tau_{ki} = 0$ ), so gelten die Formeln  $dx = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2$ ,  $da_i = \sum a_k \tau_{ik}$  mit den Integrabilitätsbedingungen  $d\tau_{ik} = \sum [\tau_{is} \tau_{sk}]$ ,  $d\sigma_i = \sum [\sigma_s \tau_{si}]$ , wobei die Differentiale im Sinne des Cartanschen äußeren Differentialkalküls zu verstehen sind. Bezeichnet man dann die beiden sphärischen Flächenelemente von  $S_2$  mit  $\Phi$  und  $\Phi'$ , so lauten die beiden Gegenstücke der Gauß-Bonnetschen Formel  $\int \Phi = -\oint \tau_{12} - \oint \tau_{03}$ ,  $\int \Phi' = -\oint \tau_{12} + \oint \tau_{03}$ , woraus durch Addition folgt  $\int \Phi + \int \Phi' = -2 \oint \tau_{12} = 2 \int \Psi$ . Wenn  $S_2$  geschlossen, orientierbar und vom Geschlechte  $p$  ist, folgt  $\int \Phi = \int \Phi' = \int \Psi = 4\pi(1-p)$ . Zum Schluß behandelt Verf. noch kurz die Frage, ob umgekehrt durch Vorgabe einer Linienkongruenz in  $P_3$  eine Fläche  $S_2$  in  $S_4$  bestimmt werden kann. *K. Strubecker*.

**Golab, St.:** Généralisation des équations de Bonnet-Kowalewski dans l'espace à un nombre arbitraire de dimensions. Ann. Soc. Polonaise Math. 22, 97—156 (1950).

Jedes  $n$ -Beinfeld entlang einer Kurve führt zu Formeln von Frenet-Serret. Wird das 3-Bein einer Kurve einer  $V_2$  in  $V_3$  gebildet von dem Normalvektor  $n^h$ , dem Einheitstangentenvektor  $t_1^h$  und dem zu  $t_1^h$  senkrechten Einheitsvektor der tangierenden  $E_2$ , so sind die zugehörigen Frenetschen Formeln identisch mit den Bonnet-Kowalewskischen Gleichungen. Diese Gleichungen werden verallgemeinert für eine Kurve  $C$  einer  $V_{n-1}$  in  $V_n$ . Dazu wird ein System von  $n$  gegenseitig senkrechten Einheitsvektoren  $t_1^h, \dots, t_{n-1}^h, n^h$  konstruiert mit der Eigenschaft, daß die kovarianten Ableitungen  $\delta_s t_\alpha^h$  ( $\alpha = 2, \dots, n-1$ ) in der lokalen  $E_2$  der Vektoren  $t_1^h$  und  $n^h$  liegen. Die zugehörigen Frenetschen Formeln enthalten  $2n-3$  Koeffizienten, Krümmungen (courbures hypersuperficielles) genannt. Es wird abgeleitet, welchen Bedingungen diese Krümmungen genügen sollen, damit  $C$  eine Krümmungslinie oder eine asymptotische Kurve  $p$ -ter Ordnung oder eine geodätische Linie  $p$ -ter Ordnung ( $p \leq 3$ ) ist. Verschiedene Sätze werden aus diesen Formeln abgeleitet. Es wird weiter angegeben, wie die eingeführten Krümmungen mit den gewöhnlichen Krümmungen zusammenhängen. Auch wird der Zusammenhang angegeben zwischen diesen Krümmungen und den  $B$ -Krümmungen [Golab, Abh. Semin. Vektor- u. Tensoranalysis, Moskau 4, 360—362 (1937); dies. Zbl. 17, 424].

*J. Haantjes* (Leiden).

**Segre, Beniamino:** Trasporti rigidi di vettori, e geometria della retta. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 267—272 (1948).

Pia Nalli (dies. Zbl. 20, 260, 30, 67) hat das folgende Problem gestellt und in Spezialfällen ( $n = 3, 4$ ) gelöst: welchen Bedingungen müssen die Funktionen  $p_{ik}(u)$  der reellen Variablen  $u$  genügen, damit  $n$  Funktionen  $x_i = x_i(u)$  existieren, für welche  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ ,  $p_{ik} = x_i x'_k - x_k x'_i$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) gilt. (Die Striche bedeuten Ableitungen nach  $u$ , die Funktionen werden also differenzierbar vorausgesetzt.) Verf. löst die gestellte Aufgabe für den allgemeinen Fall. Für die

Funktionen  $p_{ik}$  ergeben sich die charakteristischen Bedingungen  $p_{ik} - p_{ki}$ ,  $(p, p)_{ijk} = 0$ ,  $(p', p')_{ijk} = 0$ ,

$$(p_i p')_{rst}^2 + \dots + (p_i p')_{rst}^2 = \begin{vmatrix} p_{st} & p_{tr} & p_{rs} \\ p'_{st} & p'_{tr} & p'_{rs} \\ p''_{st} & p''_{tr} & p''_{rs} \end{vmatrix} [(p, q)_{ijk} = p_{ij} q_{hk} + p_{ih} q_{kj} + p_{ik} q_{jh}].$$

Diese werden näher diskutiert und zum Schluß als Anwendung notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gewonnen, daß eine Regelfläche des  $S_{n-1}$  abwickelbar oder sogar ein Kegel sei.

M. Pinl (Dacca).

Pinl, M.: Abwickelbare Schiebflächen in  $R_n$ . Comment. math. Helvetici 24, 64—67 (1950).

Die Gaußsche Krümmung  $K$  der Schiebfläche  $\mathfrak{r} = \eta(u) + \mathfrak{z}(v)$  des  $R_n$  hat die Gestalt  $K = (1/g^2) [\eta_u \mathfrak{z}_v \eta_{uu}] [\eta_u \mathfrak{z}_v \mathfrak{z}_{vv}]$ , wobei  $g = |g_{ik}| \neq 0$  die Determinante des metrischen Fundamentaltensors und die eckigen Klammern Plücker-sche Tensoren 3. Stufe (Trivektoren) bedeuten. Es folgt: Eine Schiebfläche des  $R_n$  ist dann und nur dann (auf die Ebene) abwickelbar, wenn die Überschiebung der Trivektoren, die je durch die Schmiegeebene der einen und den Tangentenvektor der anderen Schiebkurve gebildet werden, verschwindet. Im  $R_3$  ist dies nach Lie nur bei Zylinderflächen zutreffend. Im  $R_4$  verschwindet  $K$  dann und nur dann, wenn in jedem Punkte der Fläche die beiden von der (gemeinsamen) Flächentangentialebene und den Schmiegeebenen der Schiebkurven in diesem Punkte aufgespannten dreidimensionalen Räume orthogonal sind. Im  $R_n$  endlich zerfallen die abwickelbaren Schiebflächen in drei Klassen, bei denen die Schmiegeebenen der beiden Schiebkurven in jedem Flächenpunkte entweder (1) zusammenfallen oder (2) einen dreidimensionalen oder (3) einen vierdimensionalen Raum aufspannen. Im ersten Falle entstehen Ebenen, im zweiten Falle Zylinder, im dritten Falle allgemeine abwickelbare Schiebflächen des  $R_n$ ; die letzten existieren frühestens im  $R_4$ . Als Beispiel einer allgemeinen Schiebfläche des letzten Typs dient zum Schluß die bekannte Killingsche abwickelbare Schiebfläche in  $R_4$  mit Kreisen in ganznormalen Ebenen als Schiebkurven.

K. Strubecker (Karlsruhe).

Kruppa, E.: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 157, 143—176 (1949).

Gegeben sei durch ihren Tangenteneinheitsvektor  $e(u)$  die Raumkurve  $r$  vom Ortsvektor  $\mathfrak{r} = \int e(u) du$  ( $u$  = Bogen). Ihr begleitendes Dreibein  $R(e, n, \mathfrak{z})$  besteht aus der Tangente, der Haupt- und der Binormalen. Sind  $du_1$  und  $du_3$  die Kontingenzwinkel der Tangenten und der Schmiegeebenen, so ist  $\kappa(u) = du_1/du$  die Krümmung und  $\kappa_1(u) = du_3/du$  die Torsion der Kurve  $r$ . Die Theorie der Raumkurven  $s$  und ihrer Tangentenflächen fließt dann aus den Formeln

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{r} = \int_0^u e(u) du; & \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u) + v e(u), \\ \dot{e} = \kappa n, & \dot{n} = -\kappa e + \kappa_1 \mathfrak{z}, & \dot{\mathfrak{z}} = -\kappa_1 n, \\ \kappa = du_1/du, & \kappa_1 = du_3/du. \end{cases}$$

Ordnet man der Bewegung des Dreibeins  $R(e, n, \mathfrak{z})$  längs  $r$  die Bewegung des gleichgestellten Dreibeins  $S(e, n, \mathfrak{z})$  so zu, daß  $S$  eine Kurve  $s$  mit der Geschwindigkeit eins durchläuft und der Tangentenvektor  $t(u)$  von  $s$  zur rektifizierenden Ebene von  $r$  parallel bleibt und mit  $e$  den Winkel  $\sigma(u)$  ( $-\pi/2 < \sigma < \pi/2$ ) bildet, also  $t = e \cos \sigma + \mathfrak{z} \sin \sigma$  ist, so beschreibt die Gerade  $e$  des Dreibeins  $S$  eine Strahlfläche (= Regelfläche)  $\mathfrak{F}$ , und es gelten die zu (1) analogen Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{s}(u) = \int_0^u (e \cos \sigma + \mathfrak{z} \sin \sigma) du; & \mathfrak{s} = \mathfrak{s}(u) + v e(u), \\ \dot{e} = \kappa n, & \dot{n} = -\kappa e + \kappa_1 \mathfrak{z}, & \dot{\mathfrak{z}} = -\kappa_1 n, \\ \kappa = du_1/du, & \kappa_1 = du_3/du. \end{cases}$$

Dabei stellt  $\mathfrak{s}(u)$  die auf die Kurve  $r$  längentreu bezogene Striktionslinie  $s$  der Strahlfläche dar, und das Dreibein  $S(e, n, \mathfrak{z})$  besteht aus ihrer Erzeugenden  $e$ , der Zentralnormalen  $n$  und der Zentraltangente  $\mathfrak{z}$ . — Verf. nennt die Invarianten  $\kappa(u)$  und  $\kappa_1(u)$  natürliche



Krümmung und Torsion der Strahlfläche  $\mathfrak{F}$  und den Winkel  $\sigma(u)$  ihre Striktion. Diese drei Invarianten bestimmen die Strahlfläche. — Die Analogie, die zwischen den Formeln (2) und (1) besteht, eröffnet nun die Möglichkeit, die Theorie der Strahlflächen  $\mathfrak{F}$  in vollem Gleichlauf zur Theorie der Kurven  $r$  zu entwickeln, die (für  $\sigma = 0$  als Theorie der Tangentenflächen) in ihr enthalten ist. Es gelingt so, geleitet durch das so umfassend entwickelte Vorbild der Theorie der Kurven  $r$ , auch die Theorie der Strahlflächen  $\mathfrak{F}$  in beträchtlicher Weise weiterzuentwickeln. Von der Vielzahl der dabei auftretenden Fragestellungen über Strahlflächen können hier nur die Kapitelüberschriften zeugen. § 2–9 sind überschrieben: Die Striktionslinie, Die begleitenden Torsen, Die Zentraltangentenflächen, Die Zentralnormalenflächen, Die Klasse der zu den Bertrand-Kurven verwandten Strahlflächen, Die Achsenflächen der Bewegung des begleitenden Dreieines einer Strahlfläche, Die Orthogonalkurven der Erzeugenden einer Strahlfläche, Haupttangentenkurven, Krümmung und Krümmungslinien, Geodätische Linien. — Als Beispiel der genannten Beziehungen zwischen Strahlflächen- und Kurventheorie erwähnen wir den folgenden schönen Satz des Verf.: Bei der Bewegung des begleitenden Dreieines  $S$  längs einer windschiefen Strahlfläche  $\mathfrak{F}$  ist die feste Achsenfläche der Bewegung die Zentraltangentenfläche der Zentralnormalenfläche von  $\mathfrak{F}$ . Dem entspricht bei den Kurven der bekannte Satz: Bei der Bewegung des begleitenden Dreieines  $R$  längs einer Raumkurve  $r$  ist die feste Achsenfläche der Bewegung die Zentraltangentenfläche der Hauptnormalenfläche.

K. Strubecker (Karlsruhe).

**Bhattacharya, P. B. and Ram Behari:** Some properties of the skewness of distribution of the generators of a ruled surface. Bull. Calcutta math. Soc. 42, 37–42 (1950).

Ist  $\mathfrak{X} = \mathfrak{x}(s) + u \mathfrak{D}(s)$  die vektorielle Parameterdarstellung einer Regelfläche  $\mathfrak{X}(s, u)$  mit der Leitlinie  $\mathfrak{x}(s)$  und dem Einheitsvektor  $\mathfrak{D}(s)$  ( $\mathfrak{D}^2 = 1$ ) der Erzeugenden, so nennen Verff. im Anschluß an V. Ranga Chariar, Bull. Calcutta math. Soc. 37, 133–136 (1945) „skewness of distribution“ (etwa „Drallschiefte“) einer Flächen-erzeugenden die Invariante  $\mu = [\mathfrak{D} \mathfrak{D}' \mathfrak{D}''] / |\mathfrak{D}'|^3$ . Es werden zuerst die Werte von  $\mu$  für die Tangenten-, Haupt- und Binormalenfläche einer Raumkurve berechnet und dann für eine Regelfläche aus einer Geradenkongruenz. Als Anwendungen ergeben sich einige teilweise wohlbekannte Sätze und eine neue Kennzeichnung der Normalenkongruenzen.

K. Strubecker (Karlsruhe).

**Mishra, R. S.:** A note on parameter of distribution of a ruled surface through a line of a retilinear congruence. Bull. Calcutta math. Soc. 42, 53–56 (1950).

Sind  $x^i$  die Koordinaten der Punkte der Leitfläche und  $\lambda^i$  die Richtungskosinus der Strahlen einer Kongruenz, und bezeichnen  $x^i_{,\alpha}$  und  $\lambda^i_{,\alpha}$  ihre kovarianten Ableitungen sowie  $G_{\alpha\beta} = \lambda^i_{,\alpha} \lambda^i_{,\beta}$ , so kann man den Drall  $d$  der Kongruenzstrahlen in der Form schreiben:

$$d = (x^i_{,\alpha} du^\alpha, \lambda^i, \lambda^i_{,\beta} du^\beta) : (G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta).$$

Durch Quadrieren der Determinante folgt daraus, wenn  $\bar{g}_{\alpha\beta} = x^i_{,\alpha} \cdot x^i_{,\beta}$ ,  $p_\alpha = \lambda^i x^i_{,\alpha}$ ,  $\mu_{\alpha\beta} = \lambda^i_{,\beta} x^i_{,\alpha}$  bedeutet,

$$d^2 = \frac{(\bar{g}_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta) du^\alpha du^\beta}{G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta} - \left[ \frac{\mu_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta} \right]^2$$

oder, wenn  $t$  den Abstand des Zentralpunktes von der Leitfläche bedeutet,

$$d^2 + t^2 = (\bar{g}_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha p_\beta) du^\alpha du^\beta : (G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta).$$

Für Torsen ist darin  $d = 0$ , für Regelflächen der Kongruenz, deren Striktionslinie auf der Leitfläche liegt,  $t = 0$ . Da  $x^i_{,\alpha} = p_\alpha \lambda^i + \mu^\gamma_{,\alpha} \lambda^i_{,\gamma}$  ist, folgt noch

$$d^2 + t^2 = (\mu^\gamma_{,\alpha} \mu_{\beta\gamma} du^\alpha du^\beta) : (G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta).$$

Aus diesen Formeln folgert Verf. einige z. T. bekannte einfache Sätze über Ribaucoursche und isotrope Kongruenzen.

K. Strubecker (Karlsruhe).

**Wunderlich, Walter:** Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 14, Nr. 10, 16 S. (1949).

E. J. Nyström [Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 7, 1–28 (1933) und 9, 1–15 (1936); dies. Zbl. 7, 419, 15, 314] hat als erster die Kongruenz der gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln studiert und verschiedene ihrer Eigenschaften angegeben. Z. B. werden die Kugeln durch ihre gemeinsamen Tangenten flächentreu aufeinander bezogen, die Gratlinien der Torsen, in denen die Kongruenzstrahlen enthalten sind, haben in entsprechenden Punkten gleiche Torsion

und proportionale Krümmung, und ihre von den Spitzen weg gezählten Bögen sind gleich lang, während die Bögen der Berührungskurven der Torsen mit den Kugeln proportional sind. Verf. zeigt, daß die Gratlinien dieser Torsen doppelte sphärische Bündeloxodromen, d. h. doppelte sphärische Kegelloxodromen sind, wobei die Kegelscheitel mit den Nullkugeln des Bündels identisch sind, das von den beiden Kugeln aufgespannt wird. Es folgen daraus viele Eigenschaften dieser Kurven, die Sonderfälle der allgemeinen doppelten Kegelloxodromen sind (vgl. Verf., dies. Zbl. **36**, 113). Verbindet man die Kurven mit einem beliebigen Punkte der Achse des Kugelbüschels, so entstehen durch Verebnung des Kegels aus ihnen zyklische Linien (oder Grenzfälle davon). Durch die Polarität einer (zu den Nullkugeln konzentrischen) Kugel gehen die Torsen in geodätische Linien auf eiförmigen Drehellipsoiden und (dazu konfokalen) zweischaligen Drehhyperboloiden über. Diese Geodätischen sind daher zu den Berührungskurven der Torsen und Kugeln kollinear. Von besonderem Interesse ist der Grenzfall zweier berührender Kugeln. Die Gratlinien der Torsen aus gemeinsamen Kugeltangenten sind spezielle sphärische Bündeloxodromen, nämlich Inverse von ebenen Parazykloiden (die ihrerseits selbst als Kegelloxodromen aufgefaßt werden können). Die Berührungskurven der Torsen mit den Kugeln aber sind Inverse von ebenen Hyperzykloiden. Die Torsen schneiden die Berührungsebene der beiden Kugeln nach Poinsoischen Spiralen. Durch Kugelpolarität kann man die Torsen in geodätische Linien eines Drehparaboloids überführen. Die Grundrisse dieser Geodätischen auf eine achsennormale Ebene sind Hyperzykloiden.

K. Strubecker (Karlsruhe).

**Wunderlich, Walter:** Über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica **15**, Nr. 11, 8. S (1950).

Als Nyströmsche Strahlkongruenz wird der Inbegriff der gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln bezeichnet, die Verf. in der vorsteh. referierten Arbeit studiert hat. Die Torsen dieser Kongruenz gehen in geodätische Linien auf einem verlängerten Drehellipsoid oder zweischaligen Drehhyperboloid über, wenn man sie an einer Kugel polarisiert, die konzentrisch ist zu einer der beiden Nullkugeln des Büschels, das die beiden Grundkugeln der Kongruenz aufspannen. Die Gratlinien der Torsen sind mehrfache Bündeloxodromen, weil sie die Strahlbündel der Nullkugelzentren unter konstanten Winkeln durchsetzen. Daraus läßt sich aber folgern, daß die geodätischen Linien der Drehflächen zweiter Ordnung Pseudogeodätische ihrer Verbindungskegel mit den beiden Flächenbrennpunkten sind, d. h. ihre Schmiegeebenen haben gegen diese Verbindungskegel feste (übrigens gegengleiche) Neigungswinkel. Diese beiden Fokalkegel schneiden einander längs der Geodätischen unter konstantem Winkel, ebenso die Quadrik. Es folgt elementar der Satz: Wird mit dem begleitenden Dreiein einer geodätischen Linie auf einer Drehfläche 2. Ordnung eine Ebene starr verbunden, die die Tangente enthält, so berührt sie während der Bewegung des Dreieines ständig eine zur Trägerfläche konfokale Fläche 2. Ordnung. Es ist dies ein Sonderfall eines allgemeinen projektiven, hier ebenfalls elementar bewiesenen Satzes von R. Bricard [Nouv. Ann. math. **67**, 21—25 (1908)]: Die aus zwei gemeinsamen Tangenten zweier Flächen 2. Klasse an die übrigen Flächen ihrer Schar legbaren Tangentenebenen bilden projektive Ebenenbüschel.

K. Strubecker (Karlsruhe).

## Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

**Bing, R. H.:** Partitioning a set. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 1101—1110 (1949).

Das Mengersche Konvexifizierungsproblem wird in dieser Arbeit vollständig gelöst [für die Literatur und hier nicht definierte Begriffe vgl. dies. Zbl. **35**, 108; ähnliche Resultate hat unabhängig E. Moise gefunden (s. folgendes Ref.)]. Bezeichne  $M$  einen separablen, metrischen Raum. Eine Familie  $G$  von Teilmengen von  $M$  wird eine  $\varepsilon$ -Stückelung ( $\varepsilon$ -partition) genannt, wenn ihre Elemente offene, zusammenhängende und paarweise fremde Mengen sind, mit Durchmessern  $< \varepsilon$ , und die Vereinigung der Mengen von  $G$  überall dicht in  $M$  ist; man sagt kurz, daß  $M$  gestückelt werden kann, wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$   $\varepsilon$ -Stückelungen gibt. Verf. sagt, daß  $M$  die Eigenschaft  $S$  hat, wenn  $M$  die Vereinigung von endlich vielen beliebig kleinen, zusammenhängenden Mengen ist. Der Zusammenhang beider Eigenschaften wird durch den Satz 1 geklärt: Eine Menge  $M$  kann dann und nur dann gestückelt werden, wenn sie die Eigenschaft  $S$  hat. In diesem Falle gibt es  $\varepsilon$ -Stückelungen, deren Elemente die Eigenschaft  $S$  besitzen, und so gibt es eine Folge  $G_1, \dots, G_i, \dots$  (wo  $G_i$  eine  $1/i$ -Stückelung ist), in der  $G_{i+1}$  eine Verfeinerung von  $G_i$  ist (d. h. jedes Element von  $G_{i+1}$  ist genau in einer Menge von  $G_i$  enthalten). Mit Hilfe einer solcher Folge  $G_i$  konstruiert Verf. eine konvexe Metrik von  $M$ . Diesbezügliche Resultate

sind die Sätze 7, 8, 9, 10: Wenn ein kompaktes Kontinuum gestückt werden kann, besitzt es eine konvexe Metrik. Jedes Kontinuum, das im Kleinen zusammenhängend ist, besitzt eine konvexe Metrik. Wenn  $M$  zusammenhängend ist und die Eigenschaft  $S$  hat, dann gibt es eine fast-konvexe Metrik für  $M$ . *Fáry* (Paris).

**Moise, Edwin, E.: Grille decomposition and convexification theorems for compact metric locally connected continua.** Bull. Amer. math. Soc. 55, 1111—1121 (1949).

Die Arbeit gibt eine vollständige Lösung des Mengerschen Konvexifizierungsproblems (s. die Definitionen im vorsteh. Ref.), gleichzeitig und unabhängig von Verf. hat R. H. Bing dieselben Resultate erhalten (s. vorsteh. Ref.). Verf. beschäftigt sich durchweg mit einer Peanoschen Kurve  $S$  und beginnt mit einer Analyse solcher Stückelungen von  $S$  (Stückelung heißt hier „connected grating decomposition“), in denen jede Menge der Stückelung eine Peanosche Kurve ist (grille decomposition). Er beweist die Existenz einer vollständigen Folge  $\{G_i\}$  von solchen Stückelungen ( $G_{i+1}$  ist eine Verfeinerung von  $G_i$ ), in der die ganz in einem Element von  $G_i$  enthaltenen Elemente von  $G_{i+1}$  eine zusammenhängende Menge bedecken. Dann definiert er die Durchmesser  $\delta(g)$ ,  $g \in G_i$ , und setzt  $d_i(x, y) = \inf \sum_{g \in K} \delta(g)$ , wo  $K$  eine  $x$  und  $y$  verbindende Kette von  $G_i$  ist.  $d(x, y) = \lim d_i(x, y)$  ist eine konvexe Metrik. *Fáry* (Paris).

**Stauder, M. Francis Borgia: Studies on projective generalizations of metric geometry.** Rep. math. Colloqu., Indiana, II. S. 8, 49—57 (1948).

This doctoral thesis is in a close connection with a paper by Menger [„Projective generalizations of metric geometry“, I, II, Rep. math. Colloqu. II. S. 5—6, 60—75 (1944)]. In the introduction the au. recalls certain notions and results of Menger's cited paper, in particular, the axiomatic definition of an  $F$ -projective space. The relation  $(pqrs) \cdot (psqt) = (prqt)$  between any five elements  $p, q, r, s, t$  is called condition  $Q$ . — She studies the relation of the axioms of the  $F$ -projective space to  $Q$  and then she considers quintuples containing pairwise different quadruples with zero cross-ratios. It is shown that for such quintuples there exists a many-to-one mapping to the  $F$ -straight  $P_1(F)$ . An example is given for sextuples containing proper quadruples with zero cross-ratios for which there is no many-to-one mapping to  $P_1(F)$ . — Then she introduces the concept of cross-reciprocal analogous to that of cross-value defined by Menger. With each ordered quadruple of elements of a set she associates a cross-reciprocal, i. e., an unordered pair  $(f, 1/f)$  of elements of  $F_\infty$ . Analogous questions are raised and results obtained concerning the cross-reciprocal as there were concerning the cross-value by Menger. — Finally, the notion of quint-ratio is defined: she associates with an ordered quintuple  $p, p_1, p_2, p_3, p_4$  of elements a number, denoted by  $(pp_1 p_2 p_3 p_4)$ , satisfying a certain set of axioms. A set with quint-ratios is called a general projective line plane. She concludes with the proof of the following theorem: „Let  $P$  be a general projective line plane containing five elements for which all quint-ratios are finite. If every nine elements of  $P$  can be mapped with preservation of all quint-ratios on nine points of the projective plane, then the entire set  $P$  can be mapped with preservation of all quint-ratios on a subset of the projective plane“. — The paper contains a number of disagreeable misprints. *F. Kárteszi* (Budapest).

**Mirguet, Jean: Sur une classe de surfaces à points multiples.** C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1250—1252 (1950).

Fortsetzung einer vorangehenden Note (dies. Zbl. 35, 383). Es sei  $F$  eine Fläche, und zwar ein Kontinuum, im Sinne des zitierten Referates. Dann heißt der Punkt  $P \in F$  regulär (simple) bzw. singulär, je nachdem nicht jede bzw. jede „Regulatrix“  $g(P)$  von  $P$  (vgl. a. a. O.) dem Paratingent von  $F$  in  $P$  angehört. Es wird gezeigt: (1) Ist  $S$  ein singulärer Punkt von  $F$ , so ist jede Gerade durch  $S$  im Para-



tingent von  $F$  in  $S$  enthalten. (2) Nur die Menge der regulären Punkte kann einen nicht leeren (auf  $F$ ) offenen Kern besitzen. *Haupt* (Erlangen).

**Biernacki, Mieczysław:** Sur les cercles et sur les sphères qui passent par 3 ou 4 points d'un continu. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Lublin, Sect. A 3, 85—101 und polnische Zusammenfassg. 102 (1949).

Es sei  $C$  ein beschränktes Kontinuum im (euklidischen)  $E_3$ . Es seien  $U$  und  $u$  bzw.  $W$  und  $w$  die obere und untere Grenze der Krümmungen der Kreise bzw. Kugeln durch (mindestens) 3 bzw. 4 Punkte von  $C$ . In Verfolgung der Frage nach denjenigen unter diesen Kreisen bzw. Kugeln, deren Krümmungen gleich  $U$  oder  $u$  bzw. gleich  $W$  oder  $w$  sind, wird u. a. folgendes gezeigt: (1) Ist  $U < +\infty$  oder  $W < +\infty$ , so ist  $C$  ein einfacher Bogen mit stetiger orientierter Tangente. — (2) Ist  $U < +\infty$  bzw.  $W < +\infty$  und ist  $C$  eine geschlossene Kurve, welche keinen Teilbogen enthält, der auf einem Kreis bzw. einer Kugel der Krümmung  $U$  bzw.  $W$  liegt, so gilt: (a) Jeder Kreis der Krümmung  $U$  geht entweder durch einen einzigen Punkt von  $C$  (Kreis  $K'$ ) oder berührt  $C$  in einem Punkt  $A$  und geht durch einen zweiten Punkt  $B$  von  $C$  derart, daß  $AB$  Durchmesser des Kreises ist, und in  $B$  senkrecht auf  $C$  steht (Kreis  $K''$ ). Falls  $C$  in einer Ebene liegt, ist jeder Kreis  $K'$  freier Schmiegkreis von  $C$ , während jeder Kreis  $K''$  die Kurve  $C$  in den Endpunkten des Durchmessers  $AB$  berührt; das Innere von  $K'$  und  $K''$  ist fremd zu  $C$ . — (b) Für Raumkurven und Kugeln gilt die gleiche Behauptung (a) wie für ebene Kurven und Kreise. — (3) Ist  $0 < u$  bzw.  $0 < w$  und enthält das Kontinuum  $C$  keine Teile, die auf Kreisen bzw. Kugeln der Krümmung  $u$  bzw.  $w$  liegen, so gibt es keine Kreise bzw. Kugeln durch 3 bzw. 4 Punkte von  $C$  mit der Krümmung  $u$  bzw.  $w$ . — (4) Ist  $C$  eine ebene konvexe Kurve mit überall endlicher stetiger Krümmung, so wird  $U$  und  $u$  nur von Schmiegkreisen extremer Krümmung erreicht. — Die Beweise erfolgen über eine Reihe von Hilfssätzen, die auch an und für sich von Interesse sind. *Haupt* (Erlangen).

**Haupt, Otto:** Über die Verteilung der Relativordnungen bezüglich eines Bogens. Math. Z., Berlin 52, 527—546 (1950).

Bei einer früheren Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. 9, 268 und 11, 35) über die ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen  $\mathfrak{B}$  war (unter anderem) die Betrachtung der Relativordnung eines beliebigen Punktes  $X$  der Ebene bezüglich  $\mathfrak{B}$  erforderlich. Die dann gemachte einschränkende Annahme über die Werteteilung der Relativordnung von  $X$  wurde jetzt beseitigt. Zugleich wurde die Untersuchung auf den Fall der Bogen  $\mathfrak{B}$  von beschränktem starkem Stellenordnungswert im projektiven Raum  $R_n$  ( $n \geq 2$ ) verallgemeinert. — Ein Bogen  $\mathfrak{B}_n$  im  $R_n$  hat dann den starken Stellenordnungswert  $k$ , wenn er auf jeder Hyperebene höchstens  $k$  Stellen hat und wenn es mindestens eine Hyperebene gibt, auf der genau  $k$  Stellen von  $\mathfrak{B}$  liegen. Ein Punkt  $X$  von  $R_n$  hat bezüglich  $\mathfrak{B}$  den Relativstellenordnungswert  $q$ , wenn er auf einer  $q$ -Sekante liegt, aber auf keiner  $p$ -Sekante ( $p > q$ ). Eine  $q$ -Sekante von  $\mathfrak{B}$  ist irgendeine Hyperebene, welche nur Schnittstellen mit  $\mathfrak{B}$  gemeinsam hat (und zwar genau  $q \geq 1$ ). Ein innerer Punkt  $P$  der Menge aller Punkte, die  $q$ -Punkte sind für irgendein  $q = 1, 2, \dots, k$ , heißt gewöhnlicher Punkt bezüglich  $\mathfrak{B}$ , wenn sein Ordnungswert gleich dem Minimum der Ordnungswerte der Punkte einer Umgebung von  $P$  im  $R_n$  ist. Jeder innere Punkt der Menge aller gewöhnlichen Punkte heißt normal. — Außer allgemeinen Resultaten über die normalen und über die nicht normalen Punkte zeigt Verf. für ebene Bogen, die sich als Vereinigungen von endlich vielen Konvexbogen darstellen lassen, daß die mehrpunktigen Komponenten der Menge aller nicht normalen Punkte konvexe Polygone sind. — Die erhaltenen Resultate werden auf ordnungsfeste Erweiterung von Bogen angewandt. Verschiedene Beispiele erläutern die eingeführten Begriffe. *Gy. Sz-Nagy* (Szeged).

**Verblunsky, S.:** On the least number of unit circles which can cover a square. J. London math. Soc. 24, 164—170 (1949).

Ist  $E$  eine beschränkte, ebene Punktmenge vom Inhalt  $m E$  und  $N_\varepsilon$  die Anzahl der Kreise vom Radius  $\varepsilon$ , welche  $E$  überdecken, so bewies Kershner [Amer. J. Math. 61, 665—671 (1939); dies. Zbl. 21, 114] die asymptotische Gleichung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi \varepsilon^2 N_\varepsilon = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} m E.$$

Für den Fall eines Quadrates (von genügend großer Seitenlänge  $\sigma$ ), bei dem ohne weiteres  $\varepsilon = 1$  angenommen werden kann, beweist Verf. für die Anzahl  $N(\sigma)$  der Überdeckungseinheitskreise, die Doppelungleichung

$$(\sigma + 4)^2 > \frac{3}{2} \sqrt{3} N(\sigma) > \sigma^2 + c \sigma.$$

Dabei ist  $c > \frac{1}{2}$  eine von  $\sigma$  unabhängige Konstante. Dinghas (Berlin).

Marchaud, A.: Sur les ovales. Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 324—331 (1949).

Unter einem Oval  $O$  wird der Rand einer ebenen, abgeschlossenen, beschränkten, konvexen Punktmenge verstanden, welche sich nicht auf eine Strecke reduziert. Eine Stützgerade  $G$  an  $O$  im Randpunkt  $g$  von  $O$  heißt extrem, wenn  $g$  nicht innerer Punkt einer zu  $O$  gehörigen Strecke ist. Es sei  $A$  eine zu  $O$  fremde Gerade und  $E(A)$  die Menge aller Punkte  $x \in A$ , die auf extremen Stützgeraden an  $O$  liegen; durch jedes  $x \in E(A)$  gehen genau zwei solche Stützgeraden; die Verbindung ihrer (eindeutig bestimmten) Stützpunkte heiße die zu  $x$  gehörige Berührsehne. — Es wird gezeigt: (1) Gehen die Berührsehnen aller  $x \in E(A)$  durch den gleichen Punkt  $a$ , so ist  $a$  bezüglich  $O$  „Pol“ von  $A$ , d. h.  $O$  ist invariant bei der projektiven Spiegelung mit  $a$  als Zentrum und  $A$  als Achse; und  $a$  liegt „innerhalb“  $O$ . — (2) Existieren (mindestens) zwei zu  $O$  fremde Geraden  $A'$ ,  $A''$  mit je einem Pol  $a'$  bzw.  $a''$  und besitzt  $O$  in mindestens einem der Schnittpunkte der Verbindungsgeraden von  $a'$  und  $a''$  mit  $O$  z. B. einen eindeutig bestimmten rechtsseitigen Schmiegekesselschnitt, so ist  $O$  eine Ellipse. Beispiele zeigen, daß  $O$  keine Ellipse zu sein braucht, falls diese letztere Bedingung nicht erfüllt ist. — (3) Existieren unendlich viele Geraden  $A_n$  je mit einem Pol  $a_n$  und besitzt die Menge dieser  $a_n$  einen Häufungspunkt innerhalb  $O$ , so ist  $O$  ebenfalls eine Ellipse (Beispiele zeigen wieder, daß  $O$  keine Ellipse zu sein braucht, falls kein derartiger Häufungspunkt existiert). — Entsprechende Sätze gelten für „Ovale“ in der projektiven Ebene, wenn man „Ellipse“ durch „Kegelschnitt“ ersetzt. Haupt (Erlangen).

Hadwiger, H.: Über beschränkte additive Funktionale konvexer Polygone. Publ. math., Debrecen 1, 104—108 (1949).

Es bezeichne  $\{A\}$  die Gesamtheit aller abgeschlossenen, konvexen, ebenen Polygone. Dann heißt  $\varphi$  ein additives Funktional über  $\{A\}$ , falls dieses 1. Bewegungs-invariant ist, 2. bei Zerlegung von  $A$  durch eine Strecke in zwei abgeschlossene Polygone  $A'$ ,  $A''$  der Gleichung  $\varphi(A) = \varphi(A') + \varphi(A'') - \varphi(A' A'')$  genügt und 3.  $|\varphi(A)| < C(\varphi)$  für alle  $A$  innerhalb eines Einheitsquadrats gilt. Gilt an Stelle von 2. die Gleichung  $\varphi(A) = \varphi(A') + \varphi(A'')$ , so heiße  $\varphi$  einfach additiv. — Verf. beweist: Das allgemeinste additive Funktional  $\varphi(A)$  ist eine lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten der Funktionale  $\varphi_0(A) = 1$ ,  $\varphi_1(A) = \sum_1^n \varrho_k \alpha(\psi_k)$  und  $\varphi_2(A) = m A$ . Dabei bedeuten  $\varrho_k$  die Seitenlängen von  $A$  und  $\psi_k$  den Winkel, den die äußere Normale von  $\varrho_k$  mit der  $x$ -Achse bildet. Ferner ist  $\alpha(\psi)$  eine beschränkte periodische Funktion mit der Periode  $2\pi$ , und  $m A$  gleich dem Inhalt von  $A$ . — Fragt man nach dem allgemeinsten einfach additiven Funktional, so findet man leicht, daß dieses eine lineare Kombination von  $\varphi_1(A)$  und  $\varphi_2(A)$  ist. — In diesem Falle muß  $\alpha(\psi)$  der Eigenschaft  $\alpha(\psi + \pi) = -\alpha(\psi)$  genügen. Dinghas.

Berwald, L.: Obere Schranken für das isoperimetrische Defizit bei Eiliniern und die entsprechenden Größen bei Eiflächen. Mh. Math., Wien 53, 202—210 (1949).

Bei stetig und positiv gekrümmten Eiliniern und Eiflächen gelten für Umfang  $L$ ,

Flächeninhalt  $F$  bzw. Integral  $M$  der mittleren Krümmung, Oberfläche  $O$  und Rauminhalt  $V$  die bekannten Ungleichungen  $L^2 - 4\pi F \geq 0$ ,  $M^2 - 4\pi O \geq 0$ ,  $O^2 - 3M V \geq 0$ , in denen das Gleichzeichen für Kreis bzw. Kugel kennzeichnend ist. Für die beiden ersten der genannten Differenzen haben H. Liebmann [S.-B. Bayer. Akad. Wiss., München 1918, 489—505] und O. Bottema [Proc. Akad. Wet., Amsterdam 36, 442—446 (1933): dies. Zbl. 6, 412] obere Schranken angegeben. Verf. verallgemeinert diese Abschätzungen für alle drei Differenzen sowie für die folgenden vier Differenzen mit den entsprechenden Größen, die sich auf zwei Eiliniien bzw. Eiflächen  $E, E_0$  beziehen:  $L^2 L_0^2 - 16\pi^2 F F_0$ ,  $M^2 M_0^2 - 16\pi^2 O O_0$ ,  $M^2 O_0^2 - 12\pi O M_0 V_0$ ,  $O^2 M_0^2 - 12\pi M V O_0$ . Die gewonnenen oberen Schranken, die mit Hilfe der anfangs genannten Ungleichungen unter Benutzung eines Gedankens von G. Polya abgeleitet werden, hängen wesentlich von der Differenz der größten und kleinsten (Haupt-)Krümmungsradien  $R, r$  oder ihrer reziproken Werte ab; Beispiel:

$$O^2 M_0^2 - 12\pi M V O_0 \leq \frac{1}{4} M^2 O_0^2 (R - r)^2.$$

Süss (Freiburg i. Br.).

### Angewandte Geometrie:

• Veen, H. J. van: Kurzes Lehrbuch der darstellenden Geometrie. — 4. Aufl. Groningen: Noordhoff 1948. 356 S. mit 382 fig., geb. f. 15,—. [Holländisch].

Lanuza, Francisco Marcos de: Bemerkungen über eine Methode der Linear-Perspektive. Mat. Elemental, Madrid, IV. S. 8, 240—249 (1948) [Spanisch].

Lanuza, Francisco Marcos de: Die gnomonische Projektion in Beziehung zum Problem des Senkrechtstehens. Gac. mat., Madrid, I. Ser. 1, 94—100 (1949) [Spanisch].

Hohenberg, Fritz: Die Haupttangentenkurven der Müllerschen Fläche. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1949, 287—290 (1949).

Die Müllersche Fläche (eine spezielle Fläche 3. Ordnung  $\Phi$ ) ist zu einer Ebene axial invers. ihre Haupttangentenkurven sind von K. Strubecker mit Hilfe nicht-euklidischer Schraubungen beschrieben worden. Verf. gibt einen neuen und sehr einfachen synthetischen Weg zur Darstellung der Kurven an, bei welchem dieselben durch den Schnitt von  $\Phi$  mit den erstprojizierenden Zylindern gewonnen werden, deren Basiskurven die zu bestimmten Parabeln inversen Kardioiden sind.

H. Horninger (Istanbul).

Voderberg, H.: Neue Beiträge zur ersten Hauptaufgabe der Geodäsie für eine Drehfläche, insbesondere das Erdsphäroid. J. reine angew. Math. 187, 153—168 (1950).

Gegenstand der Abhandlung ist der Aufbau der Koeffizienten  $\beta_i$ ,  $\lambda_i$  und  $A_i$  der von Legendre zur Lösung der ersten geodätischen Hauptaufgabe aufgestellten Potenzreihen

$$B_2 - B_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i!} \cdot s^i; \quad L_2 - L_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{i!} s^i; \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{i!} \cdot s^i.$$

Die Koeffizienten  $\beta_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $A_i$  wurden in der geodätischen Literatur bisher in geschlossener Form als Funktionen der Ausgangsbreite  $B_1$  und des Ausgangsazimuts  $\alpha_1$  angegeben und aus dem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der geodätischen Linie entweder durch sukzessive Differentiation und recht weitläufige Umformungen hergeleitet oder nach entsprechenden von L. Grabowski speziell für das Erdellipsoid aufgestellten Rekursionsformeln gefunden. Neben dieser Koeffizientendarstellung 1. Art gab H. Boltz 1942 eine für die Berechnung von Tafeln mit der Ausgangsbreite als Argument vorteilhaftere Koeffizientendarstellung 2. Art, bei der die Koeffizienten  $\alpha_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $A_i$  selbst trigonometrische Reihen der Ausgangsbreite und des Ausgangsazimuts sind. Während Boltz von dem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung ausging und nach Entwicklung der 1. Differentialquotienten in trigono-



metrische Funktionen der Vielfachen von  $B_1$  lediglich die ersten 5 Koeffizienten auf eine den praktischen Bedürfnissen entsprechende beschränkte Stellenzahl berechnete, geht Verf. von dem Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für  $B$  und  $L$  aus und gelangt zunächst zu allgemeinen Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung in der Darstellung erster Art auf einer beliebigen Drehfläche. Durch Einführung der analytischen Ausdrücke für die Hauptkrümmungsradien  $M$  und  $N$  werden diese Formeln für das Erdellipsoid spezialisiert, und zwar benutzt Verf. die von R. König angegebene Darstellung von  $M$  und  $N$  durch eine Fundamentalfunktion  $F$ , bei der die Abhängigkeit von den Erdkonstanten der besseren Konvergenz wegen durch  $n = (a - b)/(a + b)$  an Stelle von  $e'^2$  oder  $e^2$  zum Ausdruck kommt. Durch trigonometrische Entwicklung der Hilfsfunktion  $\log F$  in eine für  $-\pi \leq B \leq \pi$  absolut und gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe wird erreicht, daß alle Koeffizienten von  $B'$  und  $L'$  in dem Differentialgleichungssystem 2. Ordnung der geodätischen Linie als absolut und gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihen auftreten. Für das Rechnen mit trigonometrischen Reihen werden unter Verwendung einer geeigneten Symbolik Multiplikations- und Differentiationsregeln aufgestellt, mit deren Hilfe es dem Verf. gelingt, durch gliedweise Differentiation erstmalig allgemeine Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung in der Darstellung 2. Art abzuleiten und weitgehende Aussagen über ihren Aufbau zu machen. Für die Koeffizienten bis zur 5. Ordnung einschließlich wird eine genaue Darstellung mit Bildungsgesetz und für die Koeffizienten bis zur 3. Ordnung auch ihre explizite Form angegeben. Abschließend wird gezeigt, daß man mittels der verwendeten Symbolik zu entsprechenden allgemeinen Formeln gelangen kann, wenn man wie Boltz von dem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung ausgeht.

W. Hofmann (Bonn).

Marussi, Antonio: Sulle formule di Helmert e sui metodi per la trasformazione di reti sull'ellissoide. Ann. Triestini, Univ. Trieste, Sez. 2, 17, 85—130 (1947).

Verf. betrachtet das Problem der Lotabweichung bei festem Referenzellipsoid, wie es gelöst wird durch die klassischen Formeln von Helmert (und ihre Modifikationen durch Krassowsky, Thilo und Verf.), die aus den Differentialformeln der geodätischen Linie gewonnen sind, sowie durch diejenigen von Clarke-Haywood, welche durch Differentiation aus den Formeln für das dem sphäroidischen äquivalenten sphärischen Dreieck hergeleitet sind, und zwar unter Gruppierung in Fragen rein geometrischer und solcher astronomisch-geodätischer Art. Die Modifikationen des Verf. betreffen die Koeffizienten  $R_1, R_3, P_4, Q_4, R_4$  und haben den Vorteil, daß die Berechnung der Länge und des Azimuts der geodätischen Linie nicht erforderlich ist, ohne daß der Genauigkeitsgrad eingeschränkt wird. Die am Schluß erfolgte tabellarische Gegenüberstellung der verschiedenen Ausdrücke für die Helmerischen Koeffizienten (Länge der geodätischen Linie  $s = 100, 500, 1000$  km; Azimut  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ ; Breite des Punktes auf dem Besselschen Ellipsoid  $45^\circ 30'$ ) gibt Aufschluß über die Genauigkeit der einzelnen Ausdrücke und zeigt insbesondere, daß der Koeffizient  $P_1$  im allgemeinen ellipsoidische Rechnung erfordert, während man sich bei den übrigen Koeffizienten auf sphärische Rechnung beschränken kann.

Volk (Würzburg).

### Topologie:

●Lefschetz, Solomon: Algebraic topology. Reproduction 1948. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXVII.) New York: American Mathematical Society 1948. VI, 393 p.

Photomechanischer Neudruck des 1942 erschienenen Werks mit Berichtigung von über 100 meist unbedeutenden Druck- und ähnlichen Fehlern; die seit 1937 geplante Neuauflage der „Topology“ des Verf. (New York, 1930) mußte angesichts

der stürmischen Entwicklung des Gebietes durch ein ganz neues Buch ersetzt werden. Das Gebiet kann man ganz bescheiden als die Anwendung der Abelschen Gruppen auf die Topologie bezeichnen; wieviel darin geleistet wurde, mag der Nichtkenner daran ermesen, daß die Darstellung seiner Grundlagen — denn die Anwendungen sind auf das Wichtigste beschränkt — diesen Umfang erfordert, obwohl sie durchaus knapp gehalten ist und viel Inhalt auf kleinem Raum bringt. — Das erste Kapitel stellt das topologische Werkzeug zusammen; es ist eine Einführung in die allgemeine Topologie, bei der sich die Auswahl des Stoffes nach dem Bedarf des Buches richtet. Das zweite bringt ebenso die topologischen Abelschen Gruppen; die (inversen und direkten) Grenzgruppen und Pontrjagins Dualitätssätze sind sein Gegenstand; Vektorräume über einem Körper werden „linear“ topologisiert, d. h. mit Umgebungen, die lineare Teilräume sind. Die drei nächsten Kapitel behandeln Komplexe. Der Komplexbegriff ist im wesentlichen der von A. W. Tucker [Ann. Math., Princeton, II. S. 34, 191—243 (1933); dies. Zbl. 6. 423] aufgestellte, gegenüber dem der Polyederkomplexe erheblich aufgelockerte; er macht es möglich, Homologie und Kohomologie vollkommen symmetrisch aufzubauen. Homologie, Schnitt- und Verschlingungszahlen, die Dualitätssätze werden zunächst bei endlichen, dann bei unendlichen Komplexen erörtert. Es folgen Produkte, Abbildungen und Unterteilungen von Komplexen; Schnittklassen von Homologieklassen; Sätze über Koinzidenz- und Fixelemente bei Komplexabbildungen (die algebraischen Vorstufen der topologischen Fixpunktsätze). Am Schluß dieser Kapitel steht der kombinatorische Mannigfaltigkeitsbegriff. Kapitel VI behandelt Netze von Komplexen, d. h. gerichtete Mengen von Komplexen, zwischen denen Komplexabbildungen bestehen. Bei ihren Homologiegruppen greift der Inhalt von Kap. II ein; die Ergebnisse sind die Grundlage für den Gipfel der ganzen Darstellung, das Kapitel VII mit der Homologietheorie topologischer Räume. Hier wirkt alles vorher Gebrachte zusammen. Der Ansatz ist bekannt: jede endliche offene Überdeckung (z. B.) bestimmt einen endlichen Simplicialkomplex; alle diese Komplexe bilden ein Netz, und die Grenzgruppen ihrer Homologiegruppen sind die Homologiegruppen des topologischen Raumes. Verschiedene verwandte Theorien werden in ihrer Tragweite verglichen und ihre Übereinstimmung nachgewiesen. Das letzte Kapitel behandelt Polyeder. Hier werden auch die Homotopiegruppen und ihr Zusammenhang mit den Homologiegruppen behandelt. Im übrigen findet man eine, teilweise gedrängte, Übersicht über manche wichtige Anwendungen der Theorie, z. B. bei Gruppenmannigfaltigkeiten. Zwei Anhänge, der eine von Eilenberg und Mac Lane über Homologie in unendlichen Komplexen und Kompakten, der andere von P. A. Smith über Fixpunkte periodischer Transformationen, beschließen das Buch, das sich ja als Grund- und Hauptwerk längst bewährt hat.

H. Kneser (Tübingen).

Marczewski, Edward: Sur l'isomorphisme des relations et l'homéomorphisme des espaces. Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 336—342 (1949).

Es sei  $X$  eine Menge. Betrachtet werden Relationen  $p \varrho q$  ( $p \in X$ ,  $q \in X$ ) und „verallgemeinerte“ Relationen  $p \varrho E$  ( $p \in E$ ,  $E \subset X$ ). Jede Relation  $p \varrho q$  „bestimmt“ eine verallgemeinerte Relation  $p \varrho^* E$ , die bedeutet, daß ein  $q \in E$  existiert mit  $p \varrho q$ . Ist  $\gamma$  eine verallgemeinerte Relation, so werde jeder Menge  $E \subset X$  die Menge  $E$  aller  $p \in X$  mit  $p \gamma E$  zugeordnet; hierdurch wird  $X$  zu einem allgemein-topologischen Raum; ist dabei  $\gamma = \varrho^*$ , so heißt diese allgemeine Topologie durch  $\varrho$  bestimmt. Über diese Beziehung zwischen Relationen und allgemeinen Topologien stellt Verf. einige Sätze auf, die so einfach sind, daß ihre Beweise überflüssig sind oder nur wenige Zeilen umfassen.

Nöbeling (Erlangen).

Calabi, Lorenzo: Topologia astratta. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. 7, 428—457 (1948).

Eine Zusammenstellung der wichtigsten Begriffe und der Hauptergebnisse der mengentheoretischen Topologie, insbesondere der französischen Bourbaki-Schule.

Rinow (Greifswald).

Kuratowski, Casimir: Sur la notion de limite topologique d'ensembles. Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 219—225 (1949).

Soit  $X$  un espace, dont la topologie est définie par des suites convergentes satisfaisant aux axiomes suivants: 1. si  $\lim p_n = p$ , on a  $\lim p_{n_k} = p$ ; 2.  $p_n = p$  entraîne  $\lim p_n = p$ ; 3. si toute suite partielle de  $\{p_n\}$  contient une suite qui converge vers  $p$ , on a  $\lim p_n = p$  [v. C. Kuratowski, Topologie I, Varsovie 1933, p. 76; ce. Zbl. 8, 132]. La notion de convergence peut être étendue sur les suites composées de parties fermées de  $X$ ; notons  $(2^X)_L$  l'espace topologique ainsi défini. Les axiomes 1.—3. sont valables dans  $(2^X)_L$ , pourvu que  $\bar{A} = \bar{A}$  pour chaque partie de  $X$ . On a en outre  $(2^{A+B})_L = (2^A)_L \times (2^B)_L$ , si  $A, B$  sont des parties fermées disjointes de  $X$ . Fáy (Paris).

● Whyburn, Gordon Thomas: Analytic topology. Reproduction 1948. (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXVIII.) New York: American Mathematical Society 1948. VII, 280 p.

Unter „Analytischer Topologie“ versteht der Verf. jene Teile der Topologie, in deren Methoden die stetigen Abbildungen die wesentliche Rolle spielen (oder auch, in denen mit der Terminologie und den Hilfsmitteln der Analysis gearbeitet wird). Das Buch zerfällt in zwei Teile von je 6 Kapiteln. Der erste Teil entwickelt die allgemeinen topologischen Hilfsmittel (insbesondere die Theorie der separablen, metrischen Räume, die allein betrachtet werden) für den zweiten Teil, der der eigentlichen analytischen Topologie gewidmet ist. Die Kapitel haben folgende Überschriften, die jedoch nur einen schwachen Eindruck von der außerordentlichen Reichhaltigkeit des Buches vermitteln: I. Introductory topology; II. Continuous transformations. Junction properties of locally connected sets; III. Cut points. Non-separated cuttings; IV. Cyclic theory; V. Special types of continua; VI. Plane continua; VII. Semi-continuous decompositions and continuous transformations; VIII. General properties. Factorization; IX. Applications of monotone and non-alternating transformations; X. Interior transformations; XI. Existence theorems. Mappings onto the circle; XII. Periodicity. Fixed points. — Wir müssen uns glücklich schätzen, ein so ausgezeichnetes Lehrbuch der analytischen Topologie zu besitzen, und zwar von einem Fachmann, der selbst an der Entwicklung dieser Theorien führend beteiligt ist. Nöbeling (Erlangen).

Whyburn, G. T.: Open and closed mappings. Duke math. J. 17, 69—74 (1950).

Wenn die stetige Abbildung  $f$  [ $f(A) = B$ ] geschlossene (offene) Mengen in ebensolche transformiert, wird sie geschlossen (offen) genannt. Verf. untersucht den zu  $f$  gehörigen Zerlegungsraum [dessen Punkte die geschlossenen Mengen  $f^{-1}(y)$  ( $y \in B$ ) sind] und Faktorisierungen  $f = f_n \cdots f_1$  von  $f$ . Dabei spielen noch die folgenden Begriffe eine Rolle: Wenn  $f^{-1}(y)$  kompakt und zusammenhängend (total unzusammenhängend) ist für jedes  $y \in B$ , so wird  $f$  monoton (licht, „light“) genannt. Typische Resultate: Bis auf Homöomorphie gibt es nur eine Faktorisierung  $f = f_2 f_1$  von  $f$ , wo  $f_1$  monoton und quasi-kompakt,  $f_2$  licht ist.  $f$  erzeugt dann und nur dann eine von oben (von unten) stetige Zerlegung, wenn sie eindeutig in der Form  $f = h \Phi$  darstellbar ist, wo  $\Phi$  eine geschlossene (offene) und  $h$  eine eindeutige Abbildung bedeutet. Eine geschlossene (offene) Abbildung ist äquivalent mit der natürlichen Abbildung  $\Phi$  von  $A$  auf den von  $f$  erzeugten Zerlegungsraum. Normalität ist eine Invariante von geschlossenen Abbildungen. Fáy (Paris).

Denjoy, Arnaud: Les domaines d'approximation régulière dans les espaces cartésiens. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 885—888 (1950).

„Dans l'espace cartésien à  $n$  dimensions  $U_n$ , subdivisé en segments égaux par



un réseau régulier, étude de la frontière  $\Phi$  d'un ensemble de segments. Répartition de  $\Phi$  en fragments cycliques. Application du théorème sur les biconnexes à la distribution des éléments multiples de  $\Phi$ . Leur absence dans le cas d'un domaine d'approximation d'un continu plan". *Nöbeling* (Erlangen).

●Hurewicz, Witold and Henry Wallman: Dimension theory. Princeton: Princeton University Press 1948. 165 p.

Seit dem Erscheinen der „Dimensionstheorie“ von K. Menger (Leipzig-Berlin 1928) hat sich die Theorie der mengentheoretischen Dimension separabler, metrischer Räume wesentlich weiterentwickelt, und zwar sowohl stofflich als auch methodisch. Dies kommt in dem vorliegenden neuen Lehrbuch voll zur Geltung. An neuem Stofflichem erwähnen wir besonders den Satz von der Einbettbarkeit jedes  $n$ -dimensionalen Raumes in eine feste  $n$ -dimensionale Teilmenge des Euklidischen  $E_{2n+1}$ , die Kennzeichnung derjenigen kompakten Teilmengen des  $E_n$ , welche den  $E_n$  zerlegen (Spezialfall: Jordanscher Kurvensatz) und den Zusammenhang der mengentheoretischen Dimension mit der Homologie- und Cohomologietheorie. Jetzt erweckt die Dimensionstheorie den Eindruck einer großen Geschlossenheit und Abgerundetheit. Bezüglich der Methodik sind besonders die Verwendung der Funktionalräume, der Abbildungen in die Sphäre und die Verfeinerung von Überdeckungen hervorzuheben. Durch sie werden die Beweise außerordentlich klar und kurz. Auf diese Weise ist ein sehr elegant geschriebenes, leicht lesbares Lehrbuch entstanden. Erwähnt sei noch, daß die Verff. sich auf diejenigen Fragestellungen beschränkt haben, die nicht nur für den Spezialisten interessant sind, und daß das letzte Kapitel einen konzisen Abriß der Homologie- und Cohomologietheorie enthält. *Nöbeling*.

Roberts, J. H.: A problem in dimension theory. Amer. J. Math. 70, 126—128 (1948).

Es sei  $X$  ein separabler, metrischer Raum der Dimension  $n$  und  $Y$  ein  $(2n + 1)$ -dimensionaler euklidischer Würfel. Weiter sei  $Y^X$  der Raum aller eindeutigen, stetigen Abbildungen von  $X$  auf Teilmengen von  $Y$ , der metrisiert ist durch die Formel  $\varrho(f, g) = \sup \delta[f(x), g(x)]$ , wobei  $\delta$  die Metrik in  $Y$  ist. Schließlich sei  $H$  die Menge aller Homöomorphismen von  $X$  auf Teilmengen von  $Y$ . Es ist bekannt, daß, wenn  $X$  kompakt ist,  $H$  ein in  $Y^X$  dichtes  $G_\delta$  ist und daß, wenn  $X$  nicht kompakt ist,  $H$  wenigstens ein in  $Y^X$  dichtes  $G_\delta$  enthält. Verf. zeigt, daß, wenn  $X$  nicht kompakt ist,  $H$  selbst kein  $G_\delta$  zu sein braucht. *Nöbeling* (Erlangen).

Bassi, Achille: Sul concetto di complesso e di equivalenza combinatoria. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 28, 327—344 (1949).

Die übliche Definition eines Komplexes als topologisches Bild eines gewöhnlichen euklidischen Zellkomplexes ist nicht rein topologisch, sondern benutzt Begriffe der Affingeometrie. Verf. schlägt daher folgende rein topologische Definition vor: Ein  $n$ -dimensionaler Komplex  $K^n$  ist für  $n = 0$  eine endliche Menge von Punkten, für  $n > 0$  eine Menge von  $r$ -dimensionalen topologischen Elementen ( $0 \leq r \leq n$ ), deren Randsphären  $(r - 1)$ -dimensionale Unterkomplexe von  $K^n$  bilden, derart daß zwei solche Elemente entweder punktfremd sind oder das eine auf dem Rand des anderen liegt oder sie genau die Punkte eines Randelementes von beiden gemeinsam haben. In ähnlicher Weise wird die Unterteilungsäquivalenz zweier Komplexe durch eine rein topologische Äquivalenzrelation ersetzt. Diese Begriffe sind allgemeiner als die üblichen, wie an Beispielen gezeigt wird. So gestattet z. B. ein vierdimensionales Simplex außer seiner gewöhnlichen Simplicialzerlegung  $K_1$  auch die folgende Zerlegung  $K_2$ : Der Rand des Simplexes wird in beliebiger Weise als dreidimensionaler Komplex zerlegt, das Innere bleibt unzerlegt. Macht man den Randkomplex hinreichend kompliziert, so ist  $K_2$  kein gewöhnlicher Komplex mehr und kann daher selbstverständlich nicht aus  $K_1$  durch Unterteilung und inverse Operation hervorgehen. Diese Tatsache bezeichnet Verf. als negative Entscheidung

der Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie. Jedoch betrifft diese Bemerkung natürlich keineswegs das, was man gewöhnlich als den Inhalt der Hauptvermutung ansieht. — In der Formulierung von Beispiel 1 befindet sich ein sinnentstellender Druckfehler. Statt: „Complesso non rettificabile localmente, ma rettificabile“ muß es umgekehrt heißen „Complesso non rettificabile, ma rettificabile localmente“.

Burger (Frankfurt a. M.).

Eilenberg, Samuel and J. A. Zilber: Semi-simplicial complexes and singular homology. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 499—513 (1950).

Der Begriff des Simplicialkomplexes wird verallgemeinert zu dem des halbsimplicialen Komplexes (h. K.). Ein solcher ist eine Menge  $K$  von Elementen  $\sigma$ , genannt Simplexe, denen jeweils eine ganze Zahl  $q \geq 0$  als Dimension zugeordnet ist. Ferner bestimmt jedes  $q$ -Simplex  $\sigma$  ( $q > 0$ ) von  $K$   $q + 1$  ( $q - 1$ )-dimensionale Seitensimplexe  $\sigma^{(i)}$  ( $i = 0, \dots, q$ ), derart daß  $[\sigma^{(j)}]^{(i)} = [\sigma^{(i)}]^{(j-1)}$  für  $i < j$  und  $q > 1$  ist. Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Simplicialkomplex ist jedoch ein Simplex eines h. K. durch seine Seiten nicht notwendig eindeutig bestimmt. Es werden die Homologie- und Kohomologietheorie, Cupprodukt, simpliciale Abbildung, lokale Koeffizienten für diese h. K. in gewöhnlicher Weise eingeführt. Ein typisches Beispiel eines h. K. ist der singuläre Komplex  $S(X)$  eines stetig-zusammenhängenden topologischen Raumes  $X$ , der aus den singulären Simplexen von  $X$  (mit geordneten Ecken) besteht. In  $S(X)$  werden minimale Unterkomplexe  $M$  eingeführt mit den Eigenschaften: 1. Die in einen festen Punkt  $x^* \in X$  ausgearteten singulären Simplexe gehören zu  $M$ . 2. Wenn alle Seiten eines singulären Simplexes  $T \in S(X)$  zu  $M$  gehören, so enthält  $M$  ein einziges singuläres Simplex  $T'$ , das mit  $T$  (bei festgehaltenem Rand) homotop ist. Alle Minimalkomplexe in  $S(X)$  sind isomorph. Die Homologie- und Kohomologiegruppen von  $M$  sind zu denen von  $S(X)$ , also von  $X$ , isomorph. Falls alle Homotopiegruppen  $\pi_i(X)$  für  $i < n$  verschwinden, ist  $M \subset S_n(X)$ , wo  $S_n(X)$  aus denjenigen singulären Simplexen besteht, deren  $(n - 1)$ -Gerüst in  $x^*$  ausartet. Der Begriff des Minimalkomplexes in  $S(X)$  wird noch etwas verschärft zu dem des vollständigen Minimalkomplexes.

Burger.

Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane: Relations between homology and homotopy groups of spaces. II. Ann. Math., Princeton, II. S. 51, 514—533 (1950).

In Ann. Math., Princeton, II. S. 46, 480 (1945) haben Verff. gezeigt, wie in einem stetig-zusammenhängenden topologischen Raum  $X$ , für den die Homotopiegruppen  $\pi_i(X)$  für  $i < n$  und  $n < i < q$  verschwinden,  $\pi_n$  die Homologiegruppen  $H_i(X)$  für  $i < q$  sowie eine Faktorgruppe von  $H_q(X)$  bestimmt. Hier wird als neue Invariante von  $X$  eine gewisse charakteristische  $(q + 1)$ -dimensionale Kohomologiekategorie  $k_n^{q+1}$  eingeführt, die zusammen mit  $\pi_n$  und  $\pi_q$  auch  $H_q(X)$  in rein algebraischer Weise festlegt. In der oben genannten Arbeit wurde eine simpliciale Abbildung  $\alpha$  des halbsimplicialen (vgl. voriges Referat) singulären Komplexes  $S_n(X)$  in einen rein algebraisch definierten halbsimplicialen Komplex  $K = K(\pi_n, n)$  benutzt. Diese wird jetzt genauer untersucht, indem ein Minimalkomplex  $M \subset S(X)$  (vgl. voriges Referat) eingeführt wird, der wegen  $\pi_i = 0$  für  $i < n$  ganz in  $S_n(X)$  liegt. In den Dimensionen  $< q$  vermittelt dann  $\alpha$  einen Isomorphismus der entsprechenden Gerüste von  $M$  und  $K$ , in der Dimension  $q$  ist  $\alpha$  eine Abbildung auf das  $q$ -Gerüst von  $K$ . Also sind die Kohomologiegruppen  $H^i(X) = H^i(M) = H^i(K)$  für  $i < q$ . Die Rückwärtsabbildung  $\alpha: K \rightarrow M$  läßt sich noch auf die Dimension  $q$  simplicial fortsetzen. Ihre „Obstruktion“  $k_n^{q+1}$  gegen die Fortsetzung auf die Dimension  $q + 1$  ist ein  $(q + 1)$ -Kozyklus des abstrakten Komplexes  $K$  mit Koeffizienten in der Gruppe  $\pi_q$  (für  $n = 1$  mit in  $K$  geeignet erklärten lokalen Koeffizienten). Ihre Kohomologiekategorie hängt nicht von der Auswahl von  $\alpha$  und  $M$  ab und ist die charakteristische Kohomologiekategorie  $k_n^{q+1}$  von  $X$ . Durch geeignete Wahl von  $\alpha$  kann jeder

Kozyklus aus  $k_n^{q+1}$  als Obstruktion erhalten werden. Die  $q$ -Simplexe von  $M$  sind umkehrbar eindeutig den Paaren  $[\sigma, x]$  ( $\sigma = q$ -Simplex von  $K$ ,  $x \in \pi_q$ ) zugeordnet; also sind die  $q$ -Koketten von  $M$  (mit Koeffizienten aus  $G$ ) Funktionen  $f(\sigma, x) \in G$ . Die Kozyklen sind die Koketten von der Form  $f(\sigma, x) = \varrho(x) + r(\sigma)$  mit  $\partial r = \varrho k_n^{q+1}$  [ $\varrho \in \text{Hom}(\pi_q, G)$ ; für  $n = 1$  außerdem:  $\varrho\alpha = \varrho$  für alle Operatoren  $\alpha \in \pi_1$  von  $\pi_q$ ],  $r = q$ -Kokette von  $K$  mit Koeffizienten in  $G$ ), die Koränder  $f(\sigma, x) = 0 + (\delta g)(\sigma)$  [ $g = (q-1)$ -Kokette von  $K$ ]. Damit ist die algebraische Konstruktion von  $H^q(M, G) = H^q(X, G)$  gegeben. Der Fall  $n = 1$  wurde auch schon (in anderer Weise) von den Verff. (dies. Zbl. 34, 111) behandelt. *Burger* (Frankfurt a. M.).

**Serre, Jean-Pierre:** Trivialité des espaces fibrés. Applications. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 916—918 (1950).

Soit  $E$  un espace fibré principal (cf. J. P. Serre, ce Zbl. 34, 254) de base  $B$  et de fibre  $G$ ; l'A. donne des conditions portants sur  $B$  pour que  $E$  soit localement trivial lorsque: a)  $G$  est localement compact totalement discontinu, b)  $G$  est limite projective d'une suite dénombrable de groupes de Lie  $G_\alpha$ . Elles sont en particulier vérifiées si  $B$  est une variété. On en déduit que la suite exacte d'homotopie vaut pour  $E$ ,  $B$ ,  $G$  si  $G$  est de l'un des types a) ou b) (sans hypothèse sur  $B$ ). L'A. en donne quelques applications et signale enfin que les groupes d'homotopie  $\pi_n(G)$ , ( $n \geq 2$ ), d'un groupe  $G$  du type b) sont limites projectives des groupes  $\pi_n(G_\alpha)$ . *Borel* (Paris).

**Lichnerowicz, André:** Un théorème sur l'homologie dans les espaces fibrés. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 711—712 (1948).

Sei  $E$  ein differenzierbarer Faserraum zur Basis  $B$  und  $F$  die allgemeine Faser;  $B$ ,  $E$  und  $F$  seien kompakt und orientierbar und die Fasern nicht nullhomolog in  $E$ ; die Dimensionen von  $B$ ,  $F$  und  $E$  seien  $n$ ,  $q$  und  $n + q$ . Aus einer Form  $\Lambda$  des Grades  $k + q$  in  $E$  erhält man durch einen Integrationsprozeß über die Fasern eine Form  $\Omega = \int_{F_x} \Lambda$  des Grades  $k$  in  $B$ ; der Stokessche Satz ergibt  $d\Omega = \int_{F_x} d\Lambda$ . Da die Fasern  $F_x$  nicht nullhomolog sind, gibt es eine geschlossene Form  $\Theta$  des Grades  $q$  derart, daß  $\int_{F_x} \Theta = 1$  ist; mit ihrer Hilfe kann man zu jeder geschlossenen Form  $\Omega$  ein  $\Lambda$  angeben, aus dem  $\Omega$  wie oben hervorgeht. Damit hat man eine homomorphe Abbildung der Kohomologiegruppe  $H_{k+q}(E)$  auf  $H_k(B)$  und daher die Ungleichungen  $b_k(B) \leq b_k(E)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) zwischen den Bettischen Zahlen. Man kann statt  $H_{k+q}(E)$  auch die Faktorgruppe nach einer mit Hilfe des  $q$ -Element-Feldes der Fasern zu bildenden Untergruppe nehmen. Sind die Fasern Sphären und kann man sie zusammenhängend orientieren, so sind die Bettischen Zahlen von  $E$  die des Produktes  $B \times S_q$ . *H. Kneser* (Tübingen).

**Hq, Sze-tsen:** On Čech homology groups of retracts. Fundam. Math., Warszawa 35, 181—187 (1948).

Verf. spricht folgenden Satz aus: Die Teilmenge  $Y$  des topologischen Raumes  $X$  sei Retrakt von  $X$ ;  $G$  sei eine divisionsabgeschlossene topologische Gruppe (d. h. die Untergruppen  $n \cdot G$ ,  $n$  ganz, seien abgeschlossen);  $H^n(X, G)$ ,  $H^n(Y, G)$ ,  $H^n(X, Y, G)$  seien die  $n$ -ten Čechschen Homologiegruppen, berechnet unter Zugrundelegung endlicher offener Überdeckungen und des Koeffizientenbereiches  $G$ ; dann ist  $H^n(X, G)$  isomorph der direkten Summe von  $H^n(Y, G)$  und  $H^n(X, Y, G)$ . Im Beweis wird an wichtiger Stelle ganz allgemein auf eine Arbeit von P. Alexandroff [Trans. Amer. math. Soc. 54, 286—339 (1943)] verwiesen, und der Satz scheint denn auch unter so allgemeinen Voraussetzungen über  $G$  nicht zu gelten. *Specker* (Zürich).

**Whitehead, J. H. C.:** On simply connected, 4-dimensional polyhedra. Comment. math. Helvetici 22, 48—92 (1949).

Es wird gezeigt, daß der Homotopietypus eines einfach zusammenhängenden vierdimensionalen Polyeders charakterisiert ist durch die zu einem Ring zusammen-



gefaßten Cohomologieringe mod  $m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) [M. Bockstein, Doklady Akad. Nauk SSSR, n.S. 37, 243—245 (1942)] mit den zusätzlichen Strukturen des Pontrjagin-schen Quadrates und eines Operators, der  $n$ -dimensionale Cohomologieklassen mod  $m$  in  $(n+1)$ -dimensionale ganzzahlige abbildet. Ferner werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß ein Ring mit den genannten Strukturen zu einem solchen Polyeder gehört. Der Beweis beruht auf den beiden folgenden Sätzen: Sind  $P$  und  $Q$  einfach zusammenhängende Polyeder (beliebiger Dimension),  $f$  eine Abbildung von  $P$  in  $Q$ , die in allen ganzzahligen Cohomologiegruppen Isomorphismen induziert, so sind  $P$  und  $Q$  vom selben Homotopietypus. Ein (mit allen Strukturen verträglicher) Homomorphismus des Ringes eines einfach zusammenhängenden vierdimensionalen Polyeders  $P$  in jenen eines Polyeders  $Q$  mit denselben Eigenschaften wird durch eine Abbildung von  $P$  in  $Q$  induziert. Dazu wird gezeigt, daß jedes solche Polyeder vom selben Homotopietypus ist wie ein „reduziertes Polyeder“, aufgebaut aus in einem Punkt zusammengehefteten 2-, 3- und 4-dimensionalen Sphären und 3- und 4-dimensionalen Zellen, deren Ränder auf diesen Zellen liegen. Unter Beschränkung auf reduzierte Polyeder wird nun die geometrische Realisierung eines Homomorphismus in zwei Schritten vollzogen; es wird gezeigt, daß der Homomorphismus induziert wird durch eine Abbildung der Kettengruppen, die mit dem Corand vertauschbar ist, und diese Abbildung dann schrittweise realisiert; an dieser Stelle spielen die Produkte eine wesentliche Rolle.

Specker (Zürich).

Newman, M. H. A.: Boundaries of ULC sets in euclidean  $n$ -space. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 193—196 (1948).

Verf. gibt ein Beispiel einer in den euklidischen  $R^n$  ( $n \geq 5$ ) geradlinig eingebetteten  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe nicht leer ist, welche aber im  $R^n$  ein Gebiet begrenzt, dessen sämtliche Homotopiegruppen einschließlich der Fundamentalgruppe leer sind. Damit bildet er eine in allen Dimensionen homotopisch gleichmäßig lokal zusammenhängende ( $ULC^\infty$ ) offene Menge des  $R^n$ , deren Begrenzung aber in der ersten Dimension nicht homotopisch lokal zusammenhängend ist. Dadurch wird eine von S. Eilenberg und R. L. Wilder [Amer. J. Math. 64, 621 (1942)] gestellte Frage beantwortet. Vietoris (Innsbruck).

Freudenthal, H.: Note on the homotopy groups of spheres. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 62—64 (1949).

Sei  $f$  eine simpliziale Abbildung einer  $d$ -dimensionalen Sphäre  $S^d$  in eine Sphäre  $S^e$  ( $d > e$ ),  $p$  ein innerer Punkt eines  $d$ -dimensionalen Simplexes von  $S^d$ ; dann ist das Urbild  $f^{-1}(p)$  eine Pseudomannigfaltigkeit und  $f$  ist homotop einer Abbildung  $g$  mit der Eigenschaft, daß  $g^{-1}(p)$  eine zusammenhängende Pseudomannigfaltigkeit ist [Compositio math., Groningen 5, 299—314 (1937); dies. Zbl. 18, 177]. Der zweite Teil des Satzes wird hier neu bewiesen, da der ursprüngliche Beweis nicht stichhaltig war.

Specker (Zürich).

Specker, Ernst: Die erste Cohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Comment. math. Helvetici 23, 303—333 (1949).

Der Satz, daß die erste Cohomologiegruppe eines endlichen zusammenhängenden Komplexes durch die Fundamentalgruppe bestimmt ist, wird folgendermaßen verallgemeinert. Der endliche zusammenhängende Komplex  $K$  mit der Fundamentalgruppe  $\mathfrak{G}$  werde von dem Komplex  $K$  überlagert, und zwar gehöre die Überlagerung zur Untergruppe  $\mathfrak{H}$  von  $\mathfrak{G}$ . Dann ist die erste Cohomologiegruppe  $B^1$  von  $K$  — berechnet unter Zugrundelegung endlicher Ketten mit Koeffizienten aus einer Abelschen Gruppe  $J$  — durch die Inklusion von  $\mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{G}$  bestimmt. Gleiches gilt von der Gruppe  $E^1 \subset B^1$  derjenigen 1-dimensionalen Cohomologieklassen von  $K$ , die auf allen Zyklen den Wert 0 haben. Die Gruppe  $E^1$ , die bei einem endlichen

Komplex stets die Nullgruppe ist, wird nun unabhängig von dem Vorangehenden für einen beliebigen Komplex genauer untersucht und zwar bei Benutzung der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich. Es zeigt sich, daß  $B^1$  und  $E^1$  freie abelsche Gruppen sind und daß im Falle eines unendlichen Komplexes der Rang von  $E^1$  gleich der um 1 verminderten Endenzahl des Komplexes ist. Zusammen mit dem ersten Ergebnis findet man also: Ist  $K$  ein endlicher zusammenhängender Komplex mit der Fundamentalgruppe  $\mathcal{G}$  und  $K$  die zur Untergruppe  $\mathcal{H}$  von  $\mathcal{G}$  gehörige Überlagerung von  $K$ , so ist die Endenzahl von  $K$  durch die Inklusion  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  bestimmt. Diese und andere Ergebnisse werden auf die Untersuchung von 3-dimensionalen endlichen Mannigfaltigkeiten angewendet. Aus der bekannten Isomorphie der zweiten Homotopiegruppe eines Komplexes mit der zweiten Homologiegruppe seiner universellen Überlagerung und dem Dualitätssatz ergibt sich ein Beweis des von H. Hopf ausgesprochenen Satzes, daß die zweite Homotopiegruppe einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit durch ihre Fundamentalgruppe bestimmt ist. Ferner wird bewiesen: Die zweite Homotopiegruppe einer endlichen dreidimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit, deren nicht leerer Rand aus Ringflächen besteht, ist die Nullgruppe oder die freie abelsche Gruppe vom Rang unendlich, je nachdem die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit endlich (d. h. ein oder zwei) oder unendlich viele Enden hat. Schließlich werden Bedingungen angegeben, denen eine Gruppe  $\mathcal{G}$  genügen muß, wenn sie Fundamentalgruppe einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit sein soll, sowie Bedingungen für die Einbettbarkeit zweidimensionaler Komplexe in dreidimensionale Mannigfaltigkeiten.

H. Seifert (Heidelberg).

Morse, Marston:  *$L$ - $S$ -homotopy classes of locally simple curves.* Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 236—256 (1949).

Eine auf einer geschlossenen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $S$  liegende geschlossene Kurve  $g$  heißt lokal einfach ( $L$ - $S$ -Kurve) von der Norm  $e$  ( $> 0$ ), wenn jeder Teilbogen von  $g$  von einem Durchmesser  $< e$  ein einfacher Bogen ist. Die  $L$ - $S$ -Kurven lassen sich in  $L$ - $S$ -Homotopieklassen einteilen: Ist  $g_t$  eine Schar von geschlossenen Kurven, die stetig von dem Parameter  $t$  abhängen ( $0 \leq t \leq 1$ ) und haben alle Kurven  $g_t$  eine von  $t$  unabhängige Norm  $e$ , so gehören diese Kurven, insbesondere also  $g_0$  und  $g_1$ , zur gleichen  $L$ - $S$ -Homotopieklasse. — Es werden die sämtlichen  $L$ - $S$ -Homotopieklassen auf beliebigen geschlossenen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten aufgestellt und Normalformen für die  $L$ - $S$ -Kurven angegeben.

H. Seifert (Heidelberg).

Fenchel, W.: *Estensioni di gruppi discontinui e trasformazioni periodiche delle superficie.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 5, 326—329 (1948).

Eine topologische Selbstabbildung  $\tau$  einer Fläche bewirkt in deren Fundamentalgruppe eine Klasse von Automorphismen, nämlich eine Restklasse nach dem Normalteiler der inneren Automorphismen, also ein Element der Faktorgruppe der Gruppe aller Automorphismen nach jenem Normalteiler. Hat dies Element die endliche Ordnung  $n$ , so ist nach einem Satz von J. Nielsen die Abbildung  $\tau$  homotop einer Abbildung der Ordnung  $n$ . Dieser Satz wird hier gefolgert aus dem folgenden: Ist die Fläche in gewohnter Weise als Quotientenraum der nichteuklidischen Ebene nach einer Bewegungsgruppe dargestellt, so lassen sich die metrischen Moduln der Gruppe so abändern, daß der Automorphismus zu  $\tau$  durch eine nichteuklidische Bewegung bewirkt wird. Vom Beweis wird gesagt, daß er ein Ergebnis von Fricke über die topologische Gestalt der Mannigfaltigkeit der kanonischen Vielecke (danach scheinen nur Flächen endlichen Geschlechts gemeint zu sein) und einen Satz von P. A. Smith über periodische topologische Selbstabbildungen des Zahlenraumes benutzt.

H. Kneser (Tübingen).

Fort jr., M. K.: Essential and non essential fixed points. Amer. J. Math. 72, 315—322 (1950).

Bezeichne  $X$  einen kompakten, metrischen Raum mit Fixpunkteigenschaft (d. h. jedes  $f \in X^X$  hat Fixpunkte). Wenn für jede Umgebung  $U \ni p$  sämtliche zu  $f$  hinreichend nahe liegende Funktionen in  $U$  Fixpunkte besitzen, nennt Verf.  $p$  wesentlichen Fixpunkt von  $f$ . Er untersucht die Abbildungen  $f: X \rightarrow X$  bezüglich Wesentlichkeit ihrer Fixpunkte. Bezeichne  $F: X^X \rightarrow 2^X$  die Abbildung, die jeder Funktion  $f$  die Menge ihrer Fixpunkte zuordnet; diese Abbildung ist halbstetig von oben. Die Wesentlichkeit der Fixpunkte von  $f$  und die Stetigkeitseigenschaften von  $F$  in  $f$  sind eng verbunden: Dann und nur dann ist jeder Fixpunkt von  $f$  wesentlich, wenn  $F$  in  $f$  stetig ist. Die Menge der Funktionen, deren jeder Fixpunkt wesentlich ist, liegt überall dicht in  $X^X$ . Verf. beweist u. a. folgende Existenzsätze: Ein einziger Fixpunkt ist immer wesentlich. Wenn  $X$  eine Mannigfaltigkeit ist und die Fixpunktmenge von  $f$  total unzusammenhängend ist, so besitzt  $f$  nur wesentliche Fixpunkte. In gewissen einfachen Fällen kann man aus den lokalen Eigenschaften von  $f$  in  $p$  [ $f(p) = p$ ] auf die Wesentlichkeit von  $p$  schließen. Endlich behandelt Verf. noch spezielle Fälle bezüglich Mannigfaltigkeiten und Produktraum. *Fáry*.

Volpato, Mario: Sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni univoche e continue del cerchio. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 101—105 (1948).

G. Scorza-Dragoni hat in einer Arbeit [Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 25, 43—45 (1946)] mehrere Kriterien für die Existenz von Fixpunkten einer topologischen Abbildung der Kreisscheibe abgeleitet und dabei die Möglichkeit einer Verallgemeinerung auf stetige Abbildungen angedeutet. Verf. gibt einen ausführlichen Beweis für eines dieser verallgemeinerten Kriterien. *Rinow*.

Scorza Dragoni, G.: Alcuni teoremi sulle traslazioni piane generalizzate. Ann. Triestini, Univ. Trieste, Sez. 2 17, 5—40 (1947).

Verf. führt seine Untersuchungen bezüglich Quasi-Translationsbögen weiter, die er in zwei früheren Arbeiten begonnen hat [Accad. Ital. Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur. 9, 1—75 (1937) und Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 1, 156—161 (1946)]. In dieser Arbeit gibt er u. a. eine Verallgemeinerung eines Satzes von Kerékjártó [Acta Sci. Math., Szeged 4, 86—102 (1928/29)]. *Fáry* (Paris).

Dubois-Violette, Pierre-Louis: Sur les réseaux de courbes couvrant une surface de genre  $p$ . C. r. Acad. Sci., Paris 228, 896—898 (1949).

Auf einer geschlossenen orientierbaren Fläche sei eine Kurvenschar mit endlich vielen singulären Punkten und sonst stetiger Tangente gegeben. Dafür, daß sie sich richten läßt, ist notwendig und hinreichend, daß „jede geschlossene Kurve“ (orbe) auf der Fläche mit der Schar eine gerade Zahl Berührungen hat. Es wird ein Begriff der „Halborientierbarkeit“ einer Kurvenschar aufgestellt und gezeigt, daß nicht jede Schar halborientierbar ist. *H. Kneser* (Tübingen).

Straten, Mary Petronia van: The topology of the configurations of Desargues and Pappus. Rep. math. Colloqu., Indiana, II. S. 8, 3—17 (1948).

Nach einem Vorschlag von Menger wird jeder Konfiguration der projektiven Ebene, die aus  $n$  Punkten und  $m$  Geraden besteht, von denen jede mit 3 Punkten inzidiert, ein Graph (eindimensionaler Komplex) zugeordnet, der sich aus  $n$  Punkten und  $3m$  einfachen Bögen zusammensetzt; hierbei treten je drei Bögen an die Stelle einer Geraden der Konfiguration, entsprechend den drei Verbindungsstrecken der drei auf ihr liegenden Punkte, und zwar so, daß keine zwei Bögen des Graphen innere Punkte gemein haben. Ein solcher Graph läßt sich natürlich im allgemeinen nicht in die projektive Ebene einbetten, wohl aber in Flächen höheren Geschlechts. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß der Graph der Desarguesschen Konfiguration „irreducibly non-toroidal“ ist, d. h. daß dieser aus 10 Punkten und 30 Bögen be-



stehende Graph sich selbst noch nicht ohne Überschneidungen auf dem Torus verwirklichen läßt, wohl aber jede Restfigur, welche nach Löschen irgendeines Bogens übrig bleibt. Ferner wird bewiesen, daß der Graph der Papposschen Konfiguration „saturated toroidal“ ist, d. h. daß dieser aus 9 Punkten und 27 Bögen bestehende Graph wohl auf dem Torus gezeichnet werden kann, aber nicht mehr ein solcher, der aus dem Papposschen durch Hinzufügen eines einzigen weiteren Bogens entsteht, welcher irgend zwei seiner Punkte verbindet. *Sperner (Bonn).*

**Touchard, Jacques:** Sur un problème de configurations. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1997—1998 (1950).

C'est une étude des configurations homéomorphes à la suivante: Soit  $P$  un demi-plan borné par une droite portant  $2n - 1$  segments égaux consécutifs. Dans  $P$ , on joint les extrémités de ces segments 2 à 2 par  $n$  demi-cercles sans point commun sur la droite. L'une des  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$  configurations obtenues est un système complet si la médiatrice de l'un quelconque des  $2n - 1$  segments coupe toujours un demi-cercle au moins. L'intersection de deux demi-cercles est un point double. Combien y a-t-il de configurations avec  $p$  points doubles? Si  $x^p$  représente un système unique ayant  $p$  points doubles, l'ensemble des systèmes uniques sera représenté par un polynôme  $S_n(x)$ . En posant  $a_p = \sum x^i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, p - 1$ , on a:  $S_n = R_n(a)$ , où  $R_n$  est un polynôme homogène de degré  $n$  par rapport aux  $a$ . La fonction génératrice de  $S$  est une fraction continue qui dépend d'une série se rattachant aux fonctions  $\theta$  de Jacobi. Les démonstrations et d'autres propriétés sont annoncées. — Le cas particulier  $p = 0$  avait déjà été traité par A. Errera, Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci. **11**, 1—26 (1931). *Albert Sade (Marseille).*

## Klassische theoretische Physik.

### Elastizität. Plastizität:

● **Schultz-Grunow, F.:** Einführung in die Festigkeitslehre. Düsseldorf-Lohausen: Werner-Verlag G. m. b. H. 1949. 244 S. mit 239 Abb., broschiert DM 15,—.

Obwohl in Deutschland bereits eine stattliche Reihe von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Elastizitäts- und Festigkeitslehre vorliegt, besteht ein gewisser Mangel an solchen Büchern, die nicht nur gründlich in die Begriffswelt der Festigkeitslehre einführen, sondern zugleich in einzelne für die fortgeschrittene Technik besonders wichtige Teilgebiete Einblick gewähren, ohne vom Leser zu viel mathematische Vorkenntnisse zu verlangen. Hierher gehört das vorliegende Buch, das, ausgehend von den einfachsten Grundlagen des Spannungs- und Dehnungszustandes, dem Leser an Hand praktischer Problemstellungen die Belastungsvorgänge der geraden Stäbe (Zug, Druck, Biegung), der Kfesscheibe und -platte (bei symmetrischer Belastung), die Membrantheorie der Behälter, die Torsion und Knickung der geraden Stäbe und schließlich einige Sätze der klassischen Elastizitätstheorie (u. a. den Satz von Castigliano) näher bringt. Das Buch enthält zudem für den Ingenieur wichtige Ergänzungen; so wird z. B. der Vorgang der Wechselbeanspruchung und Verfestigung an Hand der Henckyschen Modellvorstellung erläutert. Wenn auch die Frage der formalistischen Interpretation des Stoffes vom mathematischen Standpunkt aus umstritten bleibt (manche Aufgaben ließen sich beispielsweise durch Anwendung des Extremalprinzips der Formänderungsenergie eleganter behandeln, was jedoch eine weitere Vertiefung des mathematischen Rüstzeugs bedeuten würde), so besteht der Wert des Buches sicher darin, ein Glied in einer Kette zu bilden, welche die immer größer werdende Kluft zwischen der elementaren Literatur und den verästelten Teilgebieten der sich ständig erweiternden und vielfach die letzten mathematischen Kenntnisse erfordernden theoretischen Festigkeitslehre zu überbrücken geeignet ist.

*H. Neuber (Dresden).*

**Green, A. E. and W. Zerna:** Theory of elasticity in general coordinates. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 41, 313—336 (1950).

Verff. geben eine Darstellung der bekannten Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in allgemeinen Koordinaten mit Hilfe des absoluten Differentialkalküls (Ricci-Kalkül), insbesondere der Gleichgewichtsbedingungen des Spannungstensors, der geometrischen Bedingungen des Tensors der Formänderungsgrößen, der Formänderungsenergiefunktion nebst den zugehörigen Variationsprinzipien, sowie der Spannungsdehnungsgleichungen für anisotropes Kontinuum, welche mit den bisherigen Veröffentlichungen über dieselbe Frage (Love 1927, Trefftz 1928, Brillouin 1938, Biezeno-Grammel 1939, Deuker 1941, Neuber 1943, Richter 1948/49) nicht ganz übereinstimmen.

H. Neuber (Dresden).

**Gol'denblat, I. I.:** Über eine Methode in der Theorie der elastischen und plastischen Deformationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 1001—1004 (1948) [Russisch].

Vgl. dies Zbl. 35, 410.

**Jacobs, J. A.:** Relaxation methods applied to problems of plastic flow. I, II. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 41, 349—361 (1950), 41, 458—467 (1950).

Mit Hilfe der numerischen Verfahren von Allen und Southwell wird das Problem der gemischt elastisch-plastischen Deformation beim zweidimensionalen Spannungszustand in folgenden Beispielen behandelt: 1. Beiderseits symmetrisch gekerbter Zugstab; 2. Stab mit scharfkantigem Ende bei spezieller Krafteinleitung daselbst; 3. zwischen zwei starren Platten gleichmäßig gedrückter Block. In sämtlichen Fällen wird im plastischen Gebiet die nicht-lineare Differentialgleichung der Spannungsfunktion, wie sie aus dem Fließkriterium von Mises und Hencky hervorgeht, numerisch integriert unter Beachtung der am lastfreien Rand und an der Grenze zum elastischen Gebiet geltenden Bedingungen. Das Verfahren beruht auf der Zurückführung der Differentialgleichung auf eine Differenzengleichung für ein im Körper festgelegtes quadratisches Netz. Beim 1. und 3. Beispiel ist die Ausbildung des plastischen Gebietes in Diagrammen für verschiedene Laststufen dargestellt. Ferner ist im elastischen Gebiet die Verteilung einer Vergleichsspannung wiedergegeben, die der Anstrengung des Werkstoffes nach der Hencky-Mises'schen Hypothese entspricht. Beim scharfkantigen Stab ist der Verlauf der Hauptspannungsdifferenz am Stabende dargestellt.

H. Neuber (Dresden).

**Sokolovskij, V. V.:** Über eine Form der Darstellung der Spannungskomponenten in der Plastizitätstheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 223—225 (1948) [Russisch].

Sind  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  die drei Hauptspannungen mit der Spannungsintensität  $S$  gemäß  $2S^2 = \sum (\sigma_i - \sigma)^2$  bei  $3\sigma = \sum \sigma_i$ , so ist umgekehrt:  $\sigma_i = S \cdot (\lambda \pm \sin \omega)$ ,  $\sigma_3 = S \cdot (\lambda - \sqrt{3} \cos \omega)$  mit  $\lambda = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)/S$  und frei bleibendem  $\omega$ . Drückt man die Komponenten der Matrix, die den Spannungstensor in allgemeine Lage transformiert, in üblicher Weise durch die drei Eulerschen Winkel  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\Theta$  aus, so erhält man für die 6 Komponenten des Spannungstensors Ausdrücke in den 6 Größen  $S$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\Theta$ . — Die erhaltenen Formeln werden spezialisiert auf die Fälle: Ebener Deformations- oder Spannungszustand, Torsion prismatischer Stäbe, zylindersymmetrischer ebener Deformations- oder Spannungszustand.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

**Thorne, C. J.:** On plastic flow and vibrations. J. appl. Mech., New York 17, 84—90 (1950).

Ein mechanisches Modell für die Darstellung der Spannungsdehnungskurve von Textilien, das von H. Eyring u. a. vorgeschlagen wurde, besteht aus drei parallel

geschalteten Federn, von denen die mittlere über ein Reibungsglied angeschlossen ist. Verf. entwickelt für die Behandlung von Schwingungsvorgängen ein analoges elektrisches Modell, mit dessen Hilfe sich auch Fließ-, Kriech- und Bruchvorgänge erfassen lassen. Die Ausdrücke für die Verschiebung als Funktion der Zeit werden durch Integration der zugehörigen Differentialgleichung unter Benutzung der Laplace-Transformation gewonnen. Vier Beispiele werden behandelt. 1. Primäres Kriechen bei konstanter Last; 2. Schwingungen bei periodischer Last; 3. Gleichmäßig anwachsende Last; 4. Gleichmäßig anwachsende Verformung. *H. Neuber.*

**Ayre, R. S., George Ford and L. S. Jacobsen:** Transverse vibration of a two-span beam under action of a moving constant force. *J. appl. Mech.*, New York 17, 1—12 (1950).

Es wird der Schwingungsvorgang eines durchgehenden Trägers auf drei Stützen untersucht, der unter der Einwirkung einer Last steht, die sich mit konstanter Geschwindigkeit längs des Trägers bewegt. Die auftretende Differentialgleichung wird durch Reihenentwicklung integriert. Die Reihen werden insbesondere für folgende drei Zeitabschnitte angegeben: 1. Die Last befindet sich zwischen dem 1. und 2. Auflager; 2. Die Last befindet sich zwischen dem zweiten und dritten Auflager; 3. Die Last hat den Stab verlassen. — Zur Überprüfung der Ergebnisse wurde von den Verff. ein mechanisches Modell konstruiert. Mittels elektrischer Dehnungsmessung an fünf Stellen konnte befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie nachgewiesen werden. Besonders große Spannungen zeigten sich in der Nähe der Resonanz mit der Grundschiwingung. *H. Neuber (Dresden).*

**Woinowsky-Krieger, S.:** The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. *J. appl. Mech.*, New York 17, 35—36 (1950).

Bei der Schwingung eines beiderseits unverschieblich, jedoch frei drehbar befestigten Stabes ohne äußere Last muß die achsiale Zugkraft berücksichtigt werden. Verf. stellt zunächst die Differentialgleichung der Kräfte am Balkenelement auf und führt die achsiale Zugkraft entsprechend dem Hooke'schen Gesetz als lineare Funktion der Stabverlängerung ein, deren Schwingungsdauer gleich der halben Dauer der Stabschwingung ist. Das zur Berechnung der Stabverlängerung dienende Integral über die Stablänge wird ebenso wie die Ableitungen der Durchbiegung nach der Stabkoordinate durch einen Ansatz eliminiert, nach welchem die Durchbiegung als Produkt einer reinen Zeitfunktion und einer den Randbedingungen genügenden Sinusfunktion der Stabkoordinate erscheint. Letztere fällt aus der Differentialgleichung heraus, und es verbleibt eine nicht-lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Zeitfunktion, welche diese in der dritten Potenz enthält. Die Integration führt auf elliptische Funktionen und läßt ein erhebliches Anwachsen der Frequenz mit der Amplitude erkennen. *H. Neuber (Dresden).*

**McCann, G. D. and R. H. MacNeal:** Beam-vibration analysis with the electric-analog computer. *J. appl. Mech.*, New York 17, 13—26 (1950).

Die Analogie zwischen den Differentialgleichungen des schwingenden Stabes und eines entsprechenden elektrischen Schwingungssystems wird von den Verff. für den besonderen Fall der gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen bei Berücksichtigung der Dämpfung und der Drehmasse entwickelt und bei Modellversuchen mit einer bereits im Calif. Inst. of Technology vorhandenen Apparatur angewandt. Insbesondere wird die elektrische Ersatzschaltung für die mechanischen Schwingungen eines Flugzeugtragflügels ausgewertet und zu Versuchen benützt.

*H. Neuber (Dresden).*

**Thomson, William T.:** Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. 21, 89—93 (1950).

Der Durchgang einer ebenen elastischen Welle (bei schrägem Einfall) durch ein Medium, das aus einer Anzahl paralleler Platten von verschiedenem Material



und verschiedener Dicke besteht, wird untersucht. Die Amplituden der an einer Grenzfläche gebrochenen und reflektierten longitudinalen und transversalen (in der Einfallsebene schwingenden) Wellen erhält man durch Gleichsetzen der beiderseitigen Verschiebungen und Spannungen. Die Bestimmungsgleichungen werden so geschrieben, daß man die Amplituden der durch  $n$  Schichten mit vorgegebenen elastischen Eigenschaften durchgelaufenen Wellen durch Matrizenmultiplikation berechnen kann. Die allgemeinen Formeln werden an einigen Spezialfällen erprobt.  
W. Kertz (Göttingen).

### Hydrodynamik:

●Dwinnel, James H.: *Principles of aerodynamics*. London: McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., 1949. 391 p., 47 s.

Prim, R. and C. Truesdell: A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines. *Proc. Amer. math. Soc.* **1**, 32—34 (1950).

Einfacher, vektoranalytischer Beweis der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß die Stromröhren eines stetig differenzierbaren Geschwindigkeitsfeldes materielle Röhren eines zweiten Feldes sind. *Söhngen* (Decize).

Gilbarg, D.: On the flow patterns common to certain classes of plane fluid motions. *J. Math. Phys., Massachusetts* **26**, 137—142 (1947).

Zum Problem I: Zu einer gegebenen Strömung soll die Menge aller dynamisch verschiedenen Strömungen bestimmt werden, welche dieselben Stromlinien haben, wird bewiesen: bei einer stationären Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit muß entweder die neue Stromfunktion eine lineare Funktion der alten sein oder aber die Geschwindigkeit längs jeder Stromlinie konstant. Wann das der Fall ist, wird für Potentialbewegungen in der Ebene festgestellt. Was den Raum angeht, darf Ref. vielleicht auf seine Arbeit in den S.-B. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. 1937, 5—20; dies. Zbl. **16**, 257 aufmerksam machen: Potentialströmungen mit konstanter Geschwindigkeit. — Zum Problem II: Welches sind die Stromlinien, die verschiedene Klassen von Strömungen gemeinsam haben? wird die Lösung für die Potentialströmungen kompressibler und inkompressibler Flüssigkeiten bei polytropischem Zustand des Gases beigebracht. *Hamel* (Landshut).

Supino, Giulio: Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi. II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. **6**, 708—710 (1949).

Verf. hatte kürzlich gezeigt, daß die Bewegung einer zähen Flüssigkeit i. a. nicht wirbelfrei sein kann. Jetzt greift er auf der Grundlage energetischer Betrachtungen dieselbe Fragestellung noch einmal auf. *Garten* (Tübingen).

Ferrari, Carlo: Study of the boundary layer at supersonic speeds in turbulent flow: case of flow along a flat plate. *Quart. appl. Math.* **8**, 33—57 (1950).

Verf. behandelt am Fall der ebenen, nicht angestellten Platte das Verhalten der turbulenten Grenzschicht bei Überschallanströmung, wobei auch die Grundströmung turbulent ist. Nach Aufstellung der Bewegungs-, Kontinuitäts- und Energie-Gleichungen werden der Impuls- und Energietransport sowie die Beziehungen für Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung ermittelt. Anschließend ergeben sich die Gesetze für den Reibungswiderstand, Verlauf der Grenzschichtdicken und Wärmeübergang. — Die gefundenen Lösungen sind asymptotische, also nur in genügender Entfernung von der Platten Vorderkante gültig. Die Ergebnisse für den Widerstand und Grenzschichtdickenverlauf sind analog den entsprechenden Gesetzen für inkompressible Strömung. Die Formeln enthalten einen Parameter, dessen Bestimmung dem Experiment überlassen werden muß. Ein plausibler Wert hierfür wird den Versuchsergebnissen von Frössel entnommen. *A. W. Quick*.

Truesdell, C.: Bernoulli's theorem for viscous compressible fluids. *Phys. Rev., Lancaster Pa.*, II. S. **77**, 535—536 (1950).

Drei Arten von Bernoullischen Theoremen werden unterschieden. (A) Ein Ausdruck, der das Quadrat der Geschwindigkeit additiv enthält, ist durch die ganze Strömung konstant, (B) ein solcher Ausdruck ist nur auf Bernoullischen Flächen konstant, welche die Stromlinien und die Wirbellinien enthalten, (C) es gibt irgendeine bestimmte Familie von Kurven, auf denen das Gesagte gilt. Verf. zeigt unter der Annahme, daß die lokale Fluxion, wenn nicht verschwindet, so doch wirbelfrei verteilt ist, daß es die Klasse (C) auch bei zähen Flüssigkeiten gibt. Zwei Fälle sind zu unterscheiden: entweder haben Geschwindigkeiten und Wirbel dieselbe Richtung oder sie haben dies nicht.

Hamel (Landshut).

**Ginzl, J.:** Ein Pohlhausenverfahren zur Berechnung laminarer kompressibler Grenzschichten an einer geheizten Wand. Z. angew. Math. Mech. **29**, 321—337 (1949).

Das Problem der laminaren Grenzschicht in ebener kompressibler Strömung wird von den meisten Autoren durch Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen behandelt. Die vorliegende Arbeit erfüllt diese Gleichungen durch Mittelbildung über die Grenzschicht, indem neben dem bekannten v. Kármánschen Impulssatz ein entsprechender Energiesatz für die Grenzschicht benutzt wird. Beide Integralsätze werden in geeigneter Weise so umgeformt, daß ein System von zwei simultanen linearen Differentialgleichungen entsteht. Für eine bestimmte Klasse von Geschwindigkeitsverteilungen (nach Mangler):  $u/U = 1 - (1 - \eta)^3 (1 + a_1 \eta)$  mit  $\eta = y/\delta$  und eine entsprechende Klasse von Enthalpieverteilungen:

$$i/i_a = 1 - (1 - \eta_T)^3 (b_0 + b_1 \eta_T) \quad \text{mit} \quad \eta_T = y/\delta_T$$

( $\delta$  bzw.  $\delta_T$  = Dicke der Geschwindigkeits- bzw. Temperaturgrenzschicht) und für zwei Wandtemperaturen [a) Aufheizung der Wand auf 100° C, b) Abkühlung der Wand auf -25° C] werden zur Erleichterung der numerischen Rechnung graphische Darstellungen angegeben, die die wesentliche Integrationsarbeit bereits enthalten. Den Schluß der Arbeit bildet eine kurze Besprechung des rotationssymmetrischen Falles sowie eine Anwendung der Theorie auf die Umströmung eines ebenen spindelförmigen Körpers [ $y = \text{const} (1 - \cos x)$ ;  $0 \leq x \leq 2\pi$ ] bei örtlichen Machschen Zahlen im Bereich  $1,5 \leq M \leq 2$  sowie bei geheizter und gekühlter Wand (s. o.).

Riegels (Göttingen).

**Bergman, Stefan:** Operator methods in the theory of compressible fluids. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1, (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Non-linear problems in mechanics of continua.) 19—40 (1949).

Der Verf. gibt einen gedrängten Überblick über eine große Anzahl seiner früheren Untersuchungen, so daß in diesem Referat nur die allgemeinen Umrisse angedeutet werden können. — Die Erfolge der Theorie inkompressibler Flüssigkeiten beruhen auf ihrer engen Beziehung zu der hochentwickelten komplexen Funktionentheorie, so daß man im Falle der Kompressibilität nach einer entsprechenden Verallgemeinerung suchen wird. Man kann die Strömungsfunktion  $\psi$  in Abhängigkeit von den physischen Koordinaten  $x, y$  oder von dem Geschwindigkeitsvektor (Hodographenmethode) betrachten. Bei inkompressiblen Flüssigkeiten genügt  $\psi$  in beiden Fällen der Laplaceschen Gleichung. Bei kompressiblen Flüssigkeiten dagegen genügt  $\psi(x, y)$  einer komplizierten nichtlinearen Gleichung, während die Gleichung für  $\psi$  in der Hodographenebene linear ist, so daß man letztere vorziehen wird. Durch geeignete Transformationen läßt sie sich auf die Form bringen:

$$l(H) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial H^2} = 0, \quad l(H) = (1 - M^2)/\varrho^2,$$

wo  $M$  die Machsche Zahl ist. Im Fall der Überschallgeschwindigkeit ist die Gleichung vom hyperbolischen Typ, und ihre Lösungen zeigen daher ein gänzlich anderes Verhalten als die der Laplaceschen Gleichung (elliptischer Typ). Wenn man eine Analogie zu der Methode bei inkompressiblen Flüssigkeiten sucht, so wird man

sich daher zunächst auf den Unterschallbereich beschränken. In diesem Fall läßt sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial \theta^2} + 4N \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0, \quad N = -\frac{k+1}{8} \frac{M^4}{(1-M^2)^{3/2}}.$$

Unter einem Integraloperator wird nun ein Operator verstanden, der eine Klasse  $\mathfrak{A}$  von Funktionen in Lösungen der gegebenen partiellen Differentialgleichung verwandelt. Im Unterschallbereich wird als Klasse  $\mathfrak{A}$  die Menge der analytischen Funktionen  $f, g, \dots$  der komplexen Variablen  $Z = \lambda + i\theta$  verwendet. Die benutzten Operatoren haben die Gestalt

$$P(f) = \int_{-1}^{+1} E(Z, \bar{Z}, t) f\left(\frac{1}{2} Z(1-t^2)\right) dt / (1-t^2)^{1/2}$$

oder

$$p(g) = H \left[ g(Z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+1) Q^{(n)}}{2^{2n} \Gamma(n+1)} \int_0^Z \int_0^{Z_1} \dots \int_0^{Z_{n-1}} g(Z_n) dZ_n \dots dZ_1 \right],$$

wo  $E, H$  und  $Q^{(n)}$  gewisse feste Funktionen sind. Der Verf. hat insbesondere Operatoren erster Art, bei denen  $H$  und  $Q^{(n)}$  von  $\lambda$  und  $\theta$  abhängen, und solche zweiter Art, bei denen sie nur von  $\lambda$  abhängen, behandelt. Letztere werden trotz der theoretischen Schwierigkeiten, die sie mit sich bringen, wegen der leichteren Tabellierbarkeit der Funktionen vorgezogen. Diese Operatoren erzeugen im allgemeinen Strömungsfunktionen für den Fall der Kompressibilität, die dasselbe Verhalten zeigen wie die Objektfunktion. Wenn z. B.  $g$  einen Verzweigungspunkt  $n$ -ter Ordnung hat, so gilt dasselbe für  $p(g)$ . — Diese Methode kann auf den Überschallbereich ausgedehnt werden, wobei als Klasse  $\mathfrak{A}$  die Menge der zweimal differenzierbaren Funktionen einer reellen Variablen verwendet wird. — Zum Schluß deutet der Verf. noch eine Methode an, um die nichtlineare Differentialgleichung in der physischen Ebene mit Hilfe von komplexen Orthogonalfunktionen zu behandeln. *Doetsch* (Freiburg).

Sears, W. R.: The linear perturbation theory for rotational flow. *J. Math. Phys., Massachusetts* 28, 268—271 (1950).

Es werden stationäre, isoenergetische, ebene oder dreh-symmetrische Wirbelströmungen eines kompressiblen Mediums behandelt, die nur wenig abweichen von einer (durch Druck  $p_1$ , Dichte  $\rho_1$  und Geschwindigkeit  $U$  in  $x$ -Richtung charakterisierten) homogenen Parallelströmung. Sind  $u, v$  resp. die  $x, y$ -Geschwindigkeitskomponenten, so soll also  $u = U + \bar{u}$ ,  $v = \bar{v}$  mit  $\bar{u} \ll U$ ,  $\bar{v} \ll U$  gelten. Durch

$$\frac{\partial}{\partial x} u y^\varepsilon = \psi_y, \quad \frac{\partial}{\partial x} v y^\varepsilon = -\psi_x \quad \left( \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{für ebene Strömung} \\ 1 & \text{für dreh-symmetrische Strömung} \end{cases} \right)$$

sei in üblicher Weise die Stromfunktion  $\psi$  definiert und mit ihrer Hilfe die Störungsstromfunktion  $\bar{\psi}$  durch  $\psi = U(1+\varepsilon)^{-1} y^{1+\varepsilon} + \bar{\psi}$  eingeführt. Für sie leitet Verf. mittels der Methoden der linearen Störungstheorie (Vernachlässigung von Gliedern höherer als 1. Ordnung in  $\bar{u}, \bar{v}$ ) die Näherungsgleichung

$$(1-M^2) \bar{\psi}_{xx} + \bar{\psi}_{yy} - \frac{\varepsilon}{y} \bar{\psi}_y = -(1+(\kappa-1)M^2) y^\varepsilon \Omega$$

her. Dabei ist  $M = \frac{U}{a_1}$ ,  $a_1^2 = \kappa \frac{p_1}{\rho_1}$ ,  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$  das Verhältnis der spez. Wärmen, und  $\Omega = v_x - u_y$  die mit der längs Stromlinien konstanten Entropie  $S$  nach Croccos Satz durch die Beziehung  $\Omega = \frac{p}{\rho w R} |\text{grad } S|$  ( $R$  = Gaskonstante,  $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ ) zusammenhängende Wirbelstärke des Feldes. — Hiermit kann für wirbelige Unterschallströmungen das Analogon zur Prandtl'schen Regel bei wirbelfreier Unterschallströmung flacher Profile hergeleitet werden. Es liefert die gleichen Beziehungen zwischen Geschwindigkeiten bzw. Kräften entsprechender kompressibler Strömungen und inkompressiblen Vergleichsströmungen wie jene. Zusätzlich hinzu



kommt lediglich eine Vorschrift für die Zuordnung der Wirbelstärken beider Strömungen. Hierbei ist dem Verf. ein Versehen unterlaufen: Die linke Seite der Gl. (18) seiner Arbeit muß durch  $1 - M^2$  dividiert werden. *Behrbohm* (Waldkirch/Br.).

**Opatowski, I.: Two-dimensional compressible flows.** Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1, (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Nonlinear problems in mechanics of continua.) 87—93 (1949).

Mit dem Titel sind in der Arbeit solche Strömungen verstanden, deren Geschwindigkeitsvektor nur von 2 unabhängigen Veränderlichen des stationär durchströmten, 3-dimensionalen Raumes abhängt. Zum Auffinden solcher Lösungen werden krummlinige Koordinaten eingeführt und die Resultate der Theorie harmonischer Funktionen von T. Levi-Civita verwendet. Außer den bekannten Fällen, wie jenem der allgemeinen (nicht linearisierten) kegeligen Strömung, ergibt sich auch eine Spiralströmung. Sie ist eine Verallgemeinerung der Tollmierschen Spiralströmung [Z. angew. Math. Mech. 17, 117—136 (1937)], welche allerdings nicht erwähnt wird. Anfänglich wird mit dem Geschwindigkeitspotential gearbeitet, anschließend werden Wirbelströmungen berücksichtigt und schließlich wird auch eine für den Raum verallgemeinerte Stromfunktion verwendet. Wie bei den bekannten 2-dimensionalen Strömungen ist für eine spezielle Lösung noch das Hinzunehmen von Randbedingungen erforderlich. *Klaus Oswatitsch* (Stockholm).

**Bergman, Stefan and Bernard Epstein: Determination of a compressible fluid flow past an oval-shaped obstacle.** J. Math. Phys., Massachusetts 26, 195—222 (1947).

Betrachtet wird die Umströmung eines Körpers (zweidimensional) von einer kompressiblen Flüssigkeit. In der Hodographenebene genügt die Stromfunktion einer linearen Differentialgleichung. In einer Reihe früherer Arbeiten haben die Verff. gezeigt, daß man durch Anwendung eines gewissen Integraloperators auf analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen Lösungen dieser Gleichung erhält. Die dabei auftretenden Koeffizienten-Funktionen werden teilweise tabuliert. Die Methode wird dann auf die Umströmung eines Ovals angewandt. Ausgegangen wird dabei von der inkompressiblen Umströmung einer Ellipse. Durch Anwendung des Integraloperators auf das komplexe Geschwindigkeitspotential der Ellipse ergibt sich die kompressible Umströmung eines gewissen Ovals. *Söhngen* (Deeize).

**Kuo, Y. H.: On the stability of transonic flows.** Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1, (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Nonlinear problems in mechanics of continua.) 72—73 (1949).

Gemäß der Theorie können Strömungen eines kompressiblen reibungsfreien Mediums vom Unterschall ausgehend und dahin zurückkehrend ein lokales Überschallgebiet isentrop durchfließen, solange keine Grenzlinien auftreten. Das Mißlingen jedoch einer experimentellen Bestätigung der Existenz solcher Strömungstypen veranlaßte verschiedene Autoren, solche Strömungen auf Grund von Stabilitätsbetrachtungen zu untersuchen. So studierten beispielsweise A. Kantrowitz (NACA Technical Note 1225) und J. P. Brown (AAF Technical Report 5410), eindimensionale Kanalströmungen von diesem Gesichtspunkt aus. — Verf. berichtet summarisch über einen rechnerischen Beitrag (auf iterativer Basis nach dem Dickenparameter) zu dieser Fragestellung. Er geht von der stationären ebenen Strömung über einer welligen Wand aus (Machzahl der Anströmung 0,9; Wellenamplitude 4% der Wellenlänge), so daß nach Görtler [Z. angew. Math. Mech. 20, 154—232 (1940); dies. Zbl. 25, 276] lokale Überschallgebiete auf den Wellenbergen auftreten und unterwirft diese Strömung einer durch eine sägezahnartige Geschwindigkeitswelle charakterisierten Störung. Nach Bestimmung der Störungsgeschwindigkeit können die Rankine-Hugoniot-Beziehungen auf die Wellenfront angewandt werden und ergeben eine Stoßgeschwindigkeit. Wegen der Krümmung des Stoßes wird seine Stärke hinreichend klein angenommen, so daß Entropieänderungen vernachlässigt werden können. Die Deformation der Sägezahnwelle infolge der welligen Wand wird unter diesen Bedingungen untersucht. Resultate können dieser kurzen Note nicht entnommen werden. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

**Ferrari, Carlo: Sulla determinazione di alcuni tipi di campi di corrente ipersonora.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 7, 277—283 (1950).

Verf. behandelt das Überschallumströmungsproblem dünner Tragflügel (im Raum der kartesischen Koordinaten  $x, y, z$ ) bzw. schlanker Drehkörper (im Raum der Zylinderkoordinaten

$x, Y, \theta$ ). Dabei braucht die Anströmung keine homogene Parallelströmung (in  $x$ -Richtung) zu sein, sie darf vielmehr kleine variable  $z$ -Komponenten der Geschwindigkeit ( $z$ -Achse = Hochachse) enthalten. Die Methode zur Lösung der entsprechenden Randwertprobleme der linearisierten Differentialgleichung

(1)  $\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \beta^2 \Phi_{xx}$  bzw. (2)  $\Phi_{YY} + (1/Y) \Phi_Y + (1/Y^2) \Phi_{\theta\theta} = \beta^2 \Phi_{xx}$  ( $\beta^2 = M_\infty^2 - 1$ , wo  $M_\infty > 1$  die Machzahl der  $x$ -Komponente  $U$  der Anströmgeschwindigkeit ist) für das Potential  $\Phi$  der Störgeschwindigkeiten benutzt Fourierreihen und ist nicht auf alle Fälle anwendbar. So wird z. B. der angestellte ebene Flügel mit Unterschallvorderkanten nicht erfaßt. — Das Flügelproblem wird durch lineare Superposition von durch einen Separationsansatz der Form  $\Phi = f(x, z) g(y)$  zu gewinnenden Partikularlösungen von (1) behandelt,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = U b \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(\xi, \zeta) \cos \frac{\pi}{2} m \eta \quad \left( \xi = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{b} \right),$$

wo  $b$  die Minimallänge ist derart, daß der an den Ebenen  $y = \pm b$  gespiegelte Flügel seine Spiegelbilder nicht beeinflusst. Der Flügel wird in üblicher Weise durch seine Neigungsverteilung (approximativ in der Ebene  $z = 0$ ) beschrieben, so daß damit und aus der variablen  $z$ -Komponente der Anströmung für  $\Phi$  die Ableitung  $(\Phi_z)_{z=0} = H(x, y)$  vorgegeben ist. Hieraus werde die mod  $2b$  periodische Funktion  $H^*(x, y)$  für  $-b \leq y \leq b$  durch  $H^* = H$  für Flügelpunkte und  $H^* = 0$  sonst definiert und es werde die Entwicklungsmöglichkeit von  $H^*(\xi, \eta)$  in eine

konvergente Fourierreihe  $H^*(\xi, \eta) = U \sum_{m=0}^{\infty} H_m(\xi) \cos(\pi m \eta / 2)$  angenommen. — Die Differentialgleichung für  $\Phi_m(\xi, \zeta)$  ist formal analog der Telegraphengleichung. Im symmetrischen Fall (nichtangestellter Flügel mit symmetrischem Profil) lautet ihre Randbedingung

$$\left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=+0} = H_m(\xi), \quad \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=-0} = -H_m(\xi),$$

und man kann sich auf  $\zeta > 0$  beschränken. Dadurch findet man die Lösung

$$\Phi_m(\xi, \zeta) = -\frac{1}{\beta} \int_0^{\xi-\beta\zeta} H_m(\xi') J_0\left(\frac{k}{\beta} \sqrt{(\xi-\xi')^2 - \beta^2 \zeta^2}\right) d\xi', \quad \left(k = \frac{\pi}{2} m\right),$$

wo  $J_0$  die nullte Besselsche Funktion 1. Art ist. — Im antisymmetrischen Fall dagegen (angestellter ebener Flügel) muß  $\frac{\partial \Phi_m}{\partial \zeta}$  beim Durchgang durch  $\zeta = 0$  allenthalben stetig sein und man erhält nach dem Vorgang des Verf. in einer früheren Arbeit (Journal of Aeronautical Sciences, Juni 1948, Nr. 6) für  $\zeta > 0$

$$\Phi_m = \pi h_m(\xi - \beta \zeta) + \pi k \zeta \int_0^{\xi-\beta\zeta} h_m(\xi') J_1\left(\frac{k}{\beta} \sqrt{(\xi-\xi')^2 - \beta^2 \zeta^2}\right) \frac{d\xi'}{\sqrt{(\xi-\xi')^2 - \beta^2 \zeta^2}},$$

wo  $h_m$  gemäß der Randbedingung aus der Integro-Differentialgleichung

$$\pi \beta \frac{dh_m(\xi)}{d\xi} + \pi \frac{k^2}{2\beta} \int_0^\xi h_m(\xi') (J_0(t) + J_2(t)) d\xi' = H_m(\xi) \quad \left(t = \frac{k}{\beta} (\xi - \xi')\right)$$

zu bestimmen ist. Mittels der Laplace-Transformation findet man

$$h_m(\xi) = \frac{1}{\pi \beta} \int_0^\xi H_m(\xi') J_0(t) d\xi'$$

und hat damit alles Weitere. Hierbei ist zu beachten, daß — weil  $(\partial \Phi / \partial z)_{z=0} = 0$  außerhalb des Flügels gefordert wird — nur Flügel mit Überschallkanten behandelt werden können. — Im Drehkörperproblem sei  $R = R(x)$  die Gleichung der Meridianlinie und  $W_n$  die Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit auf der Körperkontur. Das Randwertproblem für (2) lautet dann  $(\partial \Phi / \partial Y)_{Y=R} = -W_n$ . Mit dem Ansatz

$$W_n = U \sum_{m=1}^{\infty} F_m \left( \frac{x}{R} \right) \sin m \theta; \quad \Phi = U \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x, Y) Y^m \sin m \theta$$

(wobei man sich auf zu den Halbebenen  $\theta = \pm \pi/2$  symmetrische Anströmung beschränke) findet man

$$\Phi_m = \left( \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \right)^m \Phi_0 \quad \text{mit} \quad \Phi_0 = \int_{\Re \Im \Im (x/\beta Y)}^0 \omega(x - \beta Y \Im \Im u) du,$$

wo  $\omega$  eine (für jedes  $m$  eventuell andere) willkürliche Funktion ihres Arguments ist. Aus den Randbedingungen  $\partial / \partial Y (Y^m \Phi_m)_{Y=R} = -F_m$  ergeben sich die Integralgleichungen

$$(-1)^{m+1} \beta^{m+1} \int_{\Re \Im \Im (x/\beta R)}^0 \omega'_m(x - \beta R \Im \Im u) \Im \Im^{m+1} u du = -F_m$$

für  $\omega_m$ , die z. B. nach Kármáns Schrittmethode behandelt werden können. — Zum Abschluß vergleicht Verf. sein Verfahren mit den Interferenzmessungen (Rechteckflügel mit drehsymmetrischem Rumpf) von R. H. Cramer im Überschallkanal von Daingerfield [C. Ferrari, *Interference between wing and body at supersonic speeds. — Note on wind tunnel results and addendum to calculations*, J. Aeronaut. Sci., New York **16**, 542—546 (1949)] und findet — nach sinnvoller Korrektur gewisser Unsymmetrien dieser Meßergebnisse — gute Übereinstimmung. *Behrbohm* (Waldkirch i. Br.).

## Wärmelehre:

**Pignedoli, Antonio:** Su nuovi punti di vista termodinamici. La lunghezza d'onda associata con le molecole come nuove parametro termodinamico. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 50—76 (1949).

In die allgemeinen thermodynamischen Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen wird in formaler Weise eine de Broglie-Wellenlänge  $\lambda = h/mu$  eingeführt, wobei  $u$  die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Moleküle bedeutet. Es erscheint somit das Plancksche Wirkungsquantum in physikalischen Aussagen, die in Wirklichkeit keine Quanteneffekte enthalten. *G. Burkhardt*.

**Landau, H. G.:** Heat conduction in a melting solid. Quart. appl. Math. **8**, 81—94 (1950).

Die besondere Schwierigkeit bei Wärmeleitungsaufgaben mit Phasenumwandlung ist die Verschiebung der als Wärmequelle oder -senke wirkenden Phasengrenze. Ein Vergleich mit der vom Verf. nicht zitierten Arbeit von D. Geist und U. Dehlinger [dies. Zbl. **35**, 263] zeigt folgende Unterschiede in der Fragestellung: Beide betrachten eindimensionale Probleme mit beliebiger anfänglicher Temperaturverteilung in der Ausgangsphase, aber Geist und Dehlinger dort für den halbumendlichen Raum, Verf. hier auch für endliche Schichtdicke; dort nur eine konstante, hier im Ansatz auch eine veränderliche Wärmeleitzahl; dort Ermittlung der Wärmeleitung auch in der gewandelten Phase (bei beliebiger Randbedingung in der Anfangsebene), hier Untersuchung nur der Ausgangsphase bei jederzeit gegebenem Wärmeübergang durch die Grenzebene; Temperaturstetigkeit an der Phasengrenze in beiden Fällen, aber dort endliche Umwandlungsgeschwindigkeit als Funktion der veränderlichen Grenztemperatur, hier wie üblich der einfachere Ansatz einer Grenztemperatur genau in Höhe der Gleichgewichtstemperatur, also mit sofortiger Umwandlung. — Die mit konstanten Werten von Wärmeleitzahl, Eigenwärme und Wärmeübergang auf unendliche Schichtdicke vereinfachten und auf die jeweilige Grenzebene bezogenen Gleichungen enthalten nur noch einen Parameter. Nach Ermittlung der stationären Endlösung und Untersuchung der Grenzfälle sehr großer oder verschwindender Schmelzwärme werden die Gleichungen für den allgemeinen Fall in Differenzengleichungen umgeschrieben. Diese sind dann mit Relaisrechenmaschinen gelöst worden. Der einfache Näherungsgrad der Differenzenformeln beschränkte schließlich die Reichweite der Lösungen. Der Übergang zur stationären Lösung ist daher mit asymptotischen Formeln vollzogen worden, die mit den letzten maschinengerechneten Werten übereinstimmten oder ihnen noch ein wenig angepaßt wurden. Die Ergebnisse sind in Kurvenform dargestellt. *Bödeewadt*.

**Kohler, Max:** Entropiesatz im inhomogenen verdünnten Gas. Z. Physik **127**, 201—208 (1950).

**Kohler, Max:** Eine Symmetriebeziehung in der Theorie der inhomogenen verdünnten Gase. Z. Physik **127**, 215—220 (1950).

Entropiedichte und Entropiestromdichte werden für ein inhomogenes verdünntes Gas mit Maxwell-Molekülen bzw. mit starren Kugelmolekülen bis zur zweiten Näherung (d. h. bis zu quadratischen Gliedern im Reibungskoeffizienten) berechnet. Aus dem Ergebnis wird geschlossen, daß, wie zu erwarten, die Anwendung gewisser thermodynamischer Formeln in höherer Näherung nicht mehr zulässig ist. Aus dem allgemeinen Entropiesatz ergeben sich in verhältnismäßig ein-



facher Weise explizite Formeln für die Reibungsspannungen und den Wärmestrom in zweiter Näherung. Zwischen den in ihnen enthaltenen Koeffizienten besteht eine Symmetriebeziehung, die an die Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen erinnert. Sie wird in der zweiten der beiden Arbeiten nochmals unabhängig hergeleitet.

*J. Meixner (Aachen).*

**Glaser, Walter:** Ein dimensionstheoretischer Beweis des Wienschen Verschiebungsgesetzes. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa 156, 87—92 (1948).

Es wird eine Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes angegeben, die allein auf der Invarianz dieses Gesetzes gegenüber Änderungen der Grundeinheiten für Energie, Länge, Zeit und Temperatur beruht. Es werden alle dimensionslosen Potenzprodukte der Größen gebildet, deren Auftreten im genannten Gesetz auf Grund der Zusammenhänge bei der Entstehung der Strahlung zu erwarten ist. Es zeigt sich, daß nur zwei dieser Größen voneinander unabhängig sind. Durch die einfache Annahme, daß die eine dieser beiden Größen eine Funktion der anderen ist, wird ohne weitere Rechnung das Wiensche Verschiebungsgesetz in seiner richtigen Form erhalten.

*Wüster (Wuppertal).*

**Meltzer, B.:** A note on the identity of thermal noise and shot noise. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 40, 1224—1226 (1949).

Verf. leitet die Nyquistformel für die thermischen Spannungsschwankungen an einem Ohmschen Widerstand aus der Schottkyschen Theorie des Schroteffektes ab. Dabei benützt er die Einsteinsche Theorie der Brownschen Bewegung für die Ladungsschwankungen in einem elektrischen Stromkreis.

*W. Kofink (Stuttgart).*

**Klein, M. J. and L. Tisza:** Theory of critical fluctuations. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1861—1868 (1949).

Die Schwankungserscheinungen am kritischen Punkt wurden schon früher von Smoluchowski (1908), Ornstein und Zernike (1914—1926), Rocard (1933) und Yvon (1937) mit verschiedenen mathematischen Hilfsmitteln bearbeitet. Verff. diskutieren die Beziehungen dieser Theorien untereinander. Keine von ihnen kann allgemeine Gültigkeit beanspruchen, sie sind alle spezialisiert. Sie beziehen sich auch nur auf kritische Punkte eines Systems Gas-Flüssigkeit, während die Verff. auch die  $\lambda$ -Punkt-Erscheinungen in Flüssigkeiten und Festkörpern als kritische Erscheinungen mit einschließen. Die Methode der Verff. ist die „Zellularmethode“, die sich von der Methode der kanonischen Gesamtheiten dadurch unterscheidet, daß erstere alle Zellen als gleichberechtigt behandelt, während letztere eine Zelle herausgreift und die übrigen als Reservoir zusammenfaßt. Verff. diskutieren die Schwierigkeiten der bisherigen Theorien, z. B. unendliche Schwankungserscheinungen am kritischen Punkt. Die Zellularmethode dagegen ermöglicht die Korrelation der Schwankungen in verschiedenen Volumenelementen zu berechnen (auf deren Bedeutung schon früher von Ornstein und Zernike hingewiesen wurde). Bei der Entwicklung dieser Ideen ergibt sich nebenbei ein formales Kriterium für die Definition makroskopischer Variabler als Invarianten der Translationsgruppe der Zellen ineinander.

*W. Kofink (Stuttgart).*

**Verschaffelt, J. E.:** Sur la thermomécanique des fluides mixtes. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 847—868 (1949).

**Verschaffelt, J. E.:** L'effet thermique de la diffusion dans les gaz. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 869—879 (1949).

Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. 33, 88 und 140), und Vergleich der Ergebnisse mit denen von Eckart (dies. Zbl. 26, 280), von Prigogine (Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles, Dunod, Paris et Desoer, Liège, 1947), von Waldmann [Z. Phys. 121, 501 (1943); 123, 28 (1944)] und dem Ref. [Ann. Physik V. F. 43, 244 (1943)].

*J. Meixner (Aachen).*

**Gejlikman, B. T.:** Zur statistischen Theorie der Phasenumwandlungen erster Art. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 329—332 (1949) [Russisch].

Eine Kritik der Mayerschen Theorie der Kondensation, die sich im wesentlichen an die erste Mayersche Veröffentlichung [J. Chem. Phys. 6, 87 (1938)] anschließt. Das Ergebnis der Untersuchung ist, daß eine kondensierte Phase nur auftreten kann, wenn neben anziehenden auch abstoßende Kräfte wirken (?), und daß der Übergang zum geradlinigen Teil der  $p$ - $V$ -Kurve nicht als Übergang erster, sondern dritter Ordnung herauskommt. Es wird bemerkt, daß in diesem Falle auch bei Einwirkung eines äußeren Feldes keine Phasengrenzfläche (gasförmig-flüssig) auftritt. (N. B. Über diese Probleme gibt es eine ganze Reihe von Arbeiten von Mayer, Born u. a., die dem Verf. offenbar nicht zugänglich waren, und die zum Teil wesentlich weiter führen.)

Koppe (Vancouver).

**Bordoni, Piero Giorgio:** Deduzione della meccanica statistica di una legge di dipendenza della compressibilità dei solidi dalla temperatura. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 597—602 (1949).

Verf. berechnet mit Hilfe einer der Debyeschen Theorie der spezifischen Wärme analogen Methode die isotherme Kompressibilität von Metallen und vergleicht die gewonnene Formel mit den Experimenten.

W. Kofink (Stuttgart).

**Siebert, Arnold J. F.:** On the approach to statistical equilibrium. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1708—1714 (1949).

Verf. betrachtet den Zeitverlauf der Verteilung der Besetzungszahlen im Impulsraum der Moleküle eines Gases als Wahrscheinlichkeitsprozeß. Die Wahrscheinlichkeit von Änderungen der Verteilung in infinitesimalen Zeitintervallen soll durch den Stoßzahlansatz gegeben sein. Er leitet für das Rayleighsche Gasmodell die Verteilungswahrscheinlichkeit als Funktion der Zeit ab und zeigt für ein Boltzmann-gas mit mikroskopischer Reversibilität, daß die Verteilungswahrscheinlichkeit in der Grenze unendlicher Zeit einem stationären Wert zustrebt.

W. Kofink.

**Münster, Arnold:** On the theory of grand partition functions. Proc. Cambridge philos. Soc. 46, 319—330 (1950).

Verf. leitet die „große Verteilungsfunktion“ unter Verallgemeinerung der Gibbsschen Methode der virtuellen Gesamtheit ab, untersucht Schwankungserscheinungen und Phasenänderungen. Er zeigt unter anderem, daß die mittlere Schwankung der Molekülzahlen an Singularitäten der Teilpotentiale sehr groß werden kann; dann wird das System statistisch unbestimmt und zerfällt in mehrere Phasen.

W. Kofink (Stuttgart).

## Atomphysik.

### Quantenmechanik:

**Dirac, P. A. M.:** Generalized Hamiltonian dynamics. Canadian J. Math. 2, 129—148 (1950).

Verf. verallgemeinert die Hamiltonsche Mechanik so, daß sie auch anwendbar bleibt, wenn die Impulse nicht unabhängige Funktionen der Geschwindigkeiten sind. Es können dann einige Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  unabhängig von den  $q$  und  $p$  vorgegeben werden, und man erhält ebenso viele Bedingungen  $\Phi_m(q, p)$  für die Koordinaten und Impulse. Diesen Freiheitsgraden der  $\dot{q}$  lassen sich eine Art Geschwindigkeitskoordinaten  $v_m$  zuordnen; durch die  $q, p, v$  lassen sich dann die  $\dot{q}$  ausdrücken, sowie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in die übliche Form bringen. Weiterhin kann man, entsprechend den durch die  $v_m$  gegebenen Freiheitsgraden, an Stelle einer Zeit  $t$  mehrere unabhängige Variable  $t_m$  einführen. — Zum Schluß wird die Quantisierung der Theorie besprochen. Das ganze Verfahren ist besonders auf die Behandlung der relativistischen Mechanik zugeschnitten. Franz.

**Hill, E. L.:** On the formal extension of Dirac's equation under continuous transformation groups. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 910—915 (1948).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Theorie von Differentialgleichungen vom Diracschen



Typus gegenüber allgemeinen (endlichen) kontinuierlichen Gruppen von Punkttransformationen in Raum und Zeit zu verfolgen. Bereits früher wurden derartige mögliche quantenmechanische Gleichungen im Rahmen der konformen Gruppe von Dirac und Bhabha studiert [vgl. P. A. M. Dirac, Ann. Math., Princeton, II. S. 37, 429 (1936); H. J. Bhabha, Proc. Cambridge phil. Soc. 32, 622 (1936); dies. Zbl. 14, 80, 15, 424]. Um zu linearen homogenen Transformationen zu gelangen, verwenden diese Autoren überzählige, d. h. in diesem Falle hexasphärische Koordinaten. Demgegenüber stützt sich Verf. mehr auf die allgemeinen Methoden der Lieschen Gruppentheorie und verwendet als Basisoperatoren

$$X_\alpha = \xi_\alpha^k(x) p_k; p_k = -i\hbar \partial/\partial x^k.$$

Für ihre infinitesimalen Transformationen (mit  $n$  wesentlichen Parametern  $a^1, a^2, \dots, a^n$ ) ergibt sich

$$\delta X_\alpha = \delta a^\beta [X_\beta, X_\alpha] = -i\hbar c_{\alpha\beta}{}^\gamma X_\gamma \delta a^\beta$$

mit den Strukturkonstanten  $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ . Sodann werden die Invarianzbedingungen des Operators

$$\mathfrak{M} \equiv \beta^\alpha \xi_\alpha^k(x) [p_k - \varepsilon A_k/c] + i m_0 c$$

gegenüber endlichen kontinuierlichen Gruppen  $G$  (mit den Basisoperatoren  $X_\alpha$ ) untersucht. Von den vier Funktionen  $A_k(x)$  wird dabei nur vektoriell kovariantes Verhalten vorausgesetzt;  $\varepsilon, c$  und  $m_0$  sind die üblichen absoluten Konstanten. Die gesuchten Bedingungen wirken sich auf die Operatoren  $\beta$  aus. Verf. interpretiert sie in der Nachbarschaft der Identität als lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Zur Anwendung auf die Dirac-Gleichung

$$\mathfrak{M} \Psi \equiv \{\beta^\alpha \xi_\alpha^k(x) \Pi_k + i m_0 c\} \Psi = 0$$

hat man also die Operatoren  $\beta$  algebraischen Bedingungen zu unterwerfen, die mit diesen Differentialgleichungen verträglich sind. Verf. nimmt an, daß die Darstellung dieser Algebra durch Hermitesche Matrizen möglich ist (eventuell nach einer geeigneten Transformation im Darstellungsraum der Wellenfunktion). — Von besonderem Interesse wird der Fall, daß die Gruppe  $G$  nicht einfach ist, sondern eine invariante Untergruppe der Ordnung  $m < n$  enthält. Dann wird  $\beta_{m+1} = \dots = \beta_n = 0$  möglich und die Dirac-Gleichung  $\mathfrak{M} \Psi = 0$  enthält nurmehr  $m$  Operatoren. Dies ergibt z. B. im Falle der Lorentzgruppe eine wesentliche Vereinfachung, deren invariante Translationsuntergruppe für die konforme Gruppe  $C_4$  keine invariante Untergruppe mehr darstellt. Im Falle der Lorentzgruppe zeigt Verf. die Notwendigkeit, unendliche Matrizen zur Darstellung der mit den Differentialgleichungen für die Operatoren  $\beta$  verträglichen Algebra zu verwenden, mit einer endlichen Algebra, d. h. mit endlichen Darstellungsmatrizen geht es nicht.

M. Pini (Dacca).

Kilmister, C. W.: The use of quaternions in wave-tensor calculus. Proc. R. Soc., London, A 199, 517—532 (1949).

Verf. schließt an grundlegende Ergebnisse des Eddingtonschen Wellentensorkalküls an [vgl. S. A. Eddington, Relativity Theory of Protons and Electrons, Cambridge University Press 1936; Fundamental Theory, Cambridge University Press 1946; dies. Zbl. 15, 422]. Jedem Punkt ( $x^0, x^1, x^2, x^3$ ) des vierdimensionalen affinen Raumes  $V_4$  werden Vektoren  $h^\alpha$  bzw.  ${}^i h_\alpha$  zugeordnet, derart daß diese zweifache Möglichkeit der Komponentenwahl den Normierungsrelationen  ${}_i h^\alpha {}^i h_\beta = \delta^\alpha_\beta$ ,  ${}_i h^\alpha {}^i h_\alpha = \delta^i_i$  genügt (Darstellung durch  $n$ -Beinkomponenten bzw. Koordinatenkomponenten). Sind dann  $l_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) vier Vektoren  ${}^i h_\alpha$  (oder  ${}_i h^\alpha$ ) mit den Multiplikationsregeln  $l_0 l_i = l_i l_0 = l_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ),  $l_i l_j = -l_j l_i = l_k$  (wenn  $i, j, k$  eine zyklische Permutation von 1, 2, 3 darstellt), so definieren diese Gleichungen eine Quaternionenalgebra, für deren Koeffizienten Verf. ausdrücklich auch komplexe Zahlen zuläßt. Sodann werden lineare Transformationen untersucht,  $f(q+r) = f(q) + f(r)$  für gegebene Quaternionen  $q$  und  $r$ . Schreibt man mit Hamilton  $f q$  an Stelle von  $f(q)$  und versteht unter  $K_{ij}$  die lineare Quaternionentransformation  $K_{ij} q = l_i q l_j$ , so lassen sich diese  $K_{ij}$  allein durch die schief-symmetrischen Operatoren  ${}_i K_{11}, {}_i K_{21}, {}_i K_{31}, K_{02}$  (vom Quadrat  $-1$ ) darstellen. Die Algebra der  $K_{ij}$  (mit gewissen Faktoren  $\pm i$ ) ist isomorph zur Algebra der Eddingtonschen  $E$ -Zahlen. Die  $K_{ij}$  gestatten eine Darstellung durch Matrizen  $S_{ij}$ , die von Verf. vollständig angegeben werden (analog der von S. A. Eddington gegebenen Darstellung der  $E$ -Zahlen). Weiterhin benutzt Verf. die erhaltenen Ergebnisse um Eddingtons einfache Wellengleichung abzuleiten. Eddingtons Wellen-



identitäten und Lösungen der Wellengleichung ergeben sich durch direkte Methoden. Schließlich gewinnt Verf. auf diese Weise auch die Diracschen Gleichungen. Dabei handelt es sich um eine gewisse Modifikation des Eddingtonschen Verfahrens, welche die folgenden Vorteile bietet: (1) zu zeigen, warum die Begriffe des Fernparallelismus in die Theorie dieser Gleichungen eingehen; (2) eine Ableitung der Diracschen Gleichungen in einem affinen Raum mit Fernparallelismus zu leisten; (3) die Diracschen Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form mit Hilfe von vier Differentialoperatoren zu gewinnen (im Gegensatz zu den sechzehn Operatoren in der Eddingtonschen Theorie).

*M. Pinl (Dacca).*

**Wigner, Eugene P.:** Do the equations of motion determine the quantum-mechanical commutation relations? Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 711—712 (1950).

Wenn man nur benutzt, daß die zeitliche Ableitung einer Größe durch die Vertauschung mit der Hamiltonfunktion gegeben ist, so folgen beim harmonischen Oszillator nicht notwendig (in geeigneten Einheiten) die Amplitudenquadrate  $1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  der gewöhnlichen Theorie, sondern nur  $E_0, 1, E_0 + 1, 2, E_0 + 2, \dots$ . Die Vertauschung von Geschwindigkeit und Koordinate gibt nicht notwendig  $i[v, x] = 1$ , sondern diese Diagonalmatrix hat Elemente  $2E_0$  und  $2(1 - E_0)$ .

*F. Hund (Jena).*

**Duffin, R. J.:** On wave equation vector-matrices and their spurs. Phys. Rev. Lancaster Pa., II. S. 7, 683—685 (1950).

Wellengleichungen lassen sich in der Form schreiben  $P\psi = k\psi$ , wo  $\psi$  eine Spaltenmatrix ist und  $P$  quadratische Matrizen enthält, die Vektor- oder Tensor-komponenten entsprechen.  $P$  wird hier Vektormatrix oder Vektrix genannt. Die Lösung solcher Wellengleichungen kann durch Untersuchung der Eigenschaften der Vektrizen aufgesucht werden. Als Beispiel werden die Duffin-Kemmerschen Vertauschungsregeln für die Matrizen der Theorie der skalaren und vektoriellen Materie (dies. Zbl. 20, 90 und 23, 190) abgeleitet. Weitere allgemeine Eigenschaften der Vektrizen werden angedeutet.

*F. Hund (Jena).*

**Bodiu, Georges:** Sur le caractère problématique de certaines disjonctions a posteriori susceptible de fonder la composition ondulatoire des probabilités (Introduction de l'espace de Hilbert-Hermite). C. r. Acad. Sci., Paris 230, 180—182 (1950).

Une interprétation de la différence entre les formules classique et quantique de composition des probabilités (dans le cas des opérateurs non commutants): un caractère hypothétique ou aléatoire est attribué aux alternatives qui seraient classiquement licites mais sont quantiquement interdites, en sorte qu'une certaine imprécision est attribuée aux jugements correspondants. L'on montre que cette imprécision se trouve être égale à l'écart unité de Borel lié aux probabilités de Bayes.

*Costa de Beauregard (Paris).*

**Brittin, Wesley E.:** A note on the quantization of dissipative systems. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 396—397 (1950).

Es wird ein einfacher Beweis dafür angegeben, daß mechanische Systeme mit dissipativen Kräften, die von den Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, nicht quantisierbar sind. Eine Heisenberg-Darstellung ist möglich, wenn die Kräfte, ohne konservativ zu sein, nur von den Koordinaten abhängen; eine Schrödinger-Darstellung gibt es nur für konservative Kräfte.

*Wessel (Dayton/Ohio).*

**Wessel, Walter:** Zur relativistischen Quantenmechanik. Z. Naturforsch. 4a, 645—653 (1949).

Verf. deutet früher von ihm aufgestellte klassische Poissonklammern als Vertauschungsrelationen um, so daß er zu einer relativistischen Quantenmechanik gelangt, und gibt dafür Matrixdarstellungen an. Er geht von einer 16-gliedrigen



Algebra aus und läßt nur hermitesche Matrizen zu. Es ergeben sich durchweg unendliche Darstellungen. Seine Darstellungen führen zu keiner Klassifizierung nach einem bestimmten Spin, sondern nach einem kleinsten Spin. Er erörtert die Beziehungen seiner Theorie zu derjenigen von Bopp. *W. Kofink* (Stuttgart).

**Flint, H. T.:** Fundamental lengths and masses of fundamental particles. *Nature*, London 166, 30 (1950).

**Koppe, Heinz:** Die Reflexion einer Welle an einer Potentialschwelle. *Z. Naturforsch.* 5a, 137—139 (1950).

Verf. gewinnt im Anschluß an A. Sommerfelds Behandlung des Elektronendurchgangs durch Potentialschwellen durch eine Abänderung der W.K.B.- bzw. Gansschen Methode eine Näherungsformel für das Reflexionsvermögen einer Potentialmulde, die für kleine Reflexionsvermögen gilt. *W. Kofink* (Stuttgart).

**Soonawala, M. F.:** Circular and elliptical quantum orbits. *Indian J. Phys.* 24, 95—102 (1950).

Die in der Bohrschen Quantenmechanik für die Bahnen der Elektronen der Atomhülle entwickelten Methoden werden in eine Form gebracht, die ihre Anwendung auf allgemeine Zweikörperprobleme gestattet. Es werden außer den einfach zu behandelnden Kreisbahnen auch elliptische Bahnen untersucht, für welche die Anziehungskräfte zwischen den Teilchen, ihre Energie und die Auswahlregeln für die Quantenzahlen abgeleitet werden. *Wüster* (Wuppertal).

**Vignier, Gabriel:** Notions métriques liées à une vibration moléculaire quatrième puissance. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, Sci. math. Sci. phys.*, IV. S. 11, 93—100 (1949).

Après avoir calculé les valeurs propres  $\lambda_k$  de l'équation de Schrödinger relative à l'oscillateur unidimensionnel pour lequel l'énergie potentielle est  $V(x) = ax^4$ , l'auteur examine l'équation de Riccati que l'on peut associer à cette équation. Les interprétations géométriques des propriétés des solutions de l'équation de Riccati se transposent facilement et montrent qu'il est possible d'étudier le problème de la vibration en  $ax^4$  soit à partir de courbes planes à paramétrisation isométrique dont la fonction d'arc est  $\sigma_k = \lambda_k - u^4$ , soit à partir de courbes planes à paramétrisation isoradique pour lesquelles le rayon de courbure est  $\rho_k = \sqrt{u^4 - \lambda_k}$ . *G. Petiau* (Paris).

**Groot, Sybren R. de et Hendrik A. Tolhoek:** Un théorème général sur les probabilités de transition d'un système quantifié avec dégénérescence spatiale. *C. r. Acad. Sci., Paris* 228, 1794—1796 (1949).

Démonstration généralisée d'un théorème connu dans le cas des transitions permises d'émission lumineuse, et relatif au cas où l'hamiltonien est invariant pour les rotations d'espace; relation de ce théorème avec la règle d'Ornstein et Burger. La démonstration nouvelle fait intervenir les ensembles de Gibbs de systèmes quantifiés; elle est valable pour les transitions interdites, et s'applique à tous les phénomènes d'émission quantique, par exemple à la radioactivité  $\beta$ ; un exposé complet en sera donné dans *Physica*. *Costa de Beauregard* (Paris).

**Bauer, F. L.:** Ausreduzierte Wellengleichungen für Elementarteilchen von halbzahligem Spin. *Z. Naturforsch.* 4a, 720—721 (1949).

Wellengleichungen für Spin  $\geq 3/2$ , wie sie sich nach de Broglies „méthode de fusion“ ergeben und von Bopp kürzlich aus der Feldmechanik hergeleitet wurden, lassen sich in relativistisch kovarianter Weise angeben, wenn man die einzelnen, vollständig voneinander unabhängigen (irreduziblen) Wellengleichungen durch die Methode der Ausreduktion durch Nebenbedingungen gewinnt. Speziell werden die Fälle der 4mal 4-reihigen (vektoriellen) und der 5mal 4-reihigen (bivektoriellen) Spin  $3/2$ -Gleichung behandelt. Ein ausführlicher Bericht soll folgen. *Kofink*.